

講義ノート

非線形動力学

2020年度版（暫定版）

2020/5/16改訂

増田 新

京都工芸繊維大学

第1章

運動方程式の無次元化とオーダー評価

1.1 無次元化の必要性

たとえば、あなたが新しい方式の制振装置を考案したとして、その効果を数値シミュレーションによって示そうとしているとしよう。別途、模型実験も行う予定で、実験装置との整合を取るために制振対象物の質量を 10kg, バネ定数を 10kN/m と設定し、振幅 0.1m/s², 振動数 5Hz の正弦波地動加速度入力を与えて数値計算を行ったところ、装置を取り付けない場合に比べて振動振幅が 1/10 になった。あなたは意気揚々と結果をまとめ、○○研究会で発表する。しかし反応は散々で…

おわかりだろうか。あなたの計算の結果得た結論は、「特定の」対象物が「特定の」入力を受けた場合に対してのみ有効であり、異なる質量、バネ定数を持つ他の対象物、あるいは他の入力に対しての効果を示したことにはなっていなかった。あなたはこれらの値をいろいろに変えながら、さらには制振装置の設計パラメータもいろいろに取り替えて、構造パラメータと入力条件のいろいろな組み合わせに対して装置の設計パラメータをどのように設計すればどの程度の制振効果が得られるかを明らかにする必要があるのだ。

解析や実験によってシステムの挙動を理解しようとするとき、システムに含まれる様々なパラメータとシステムのふるまいとの間の関係を解き明かすことが興味の対象になる。システムの挙動が陽に解ける場合は、解の中にパラメータがどのように現れるかを見ることによって、これらの関係を知ることができる。しかし解を陽に求めることが難しく数値計算に依らざるを得ない場合は、上の例のようにパラメータの値をいろいろに変えながら計算を繰り返すことになる。

パラメータの数が多い場合この作業は簡単ではない。しかし多くの場合、個々のパラメータの作用は互いに独立ではなく、特定のパラメータの組み合わせがシステムの本質的なふるまいを支配することが多い。たとえば、線形 1 自由度系の運動方程式

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (1.1)$$

において、パラメータ m, c, k をすべて a 倍したとする。しかしこれは外力を $1/a$ 倍したと明らかに等価であり、ダイナミクスは不変である。さらに、**無次元化**という操作を行うと、この系のダイナミクスがただ一つのパラメータに支配されることが判明する。以下、これを見ていこう。

1.2 線形系の運動方程式の無次元化

運動方程式 (1.1) の独立変数は時間 t である。従属変数は変位 x であり長さの単位を持つ。また、運動方程式は力の釣り合いを表現しており、各項は力の単位を持つ。そこで、これらの物理量 (時間, 長さ, 力) のそれぞれについて代表量を T, L, F として、無次元量 t^*, x^*, f^* を導入しよう。

$$t = Tt^*, \quad x = Lx^*, \quad f = Ff^* \quad (1.2)$$

ここで, T, L, F は代表時間, 代表長さ, 代表力であり, t^*, x^*, f^* は無次元時間, 無次元変位, 無次元外力である. これらを運動方程式 (1.1) に代入すると,

$$m \frac{L}{T^2} \frac{d^2 x^*(t^*)}{dt^{*2}} + c \frac{L}{T} \frac{dx^*(t^*)}{dt^*} + kLx^*(t^*) = Ff^*(t^*) \quad (1.3)$$

整理して,

$$\frac{d^2 x^*(t^*)}{dt^{*2}} + \frac{cT}{m} \frac{dx^*(t^*)}{dt^*} + \frac{kT^2}{m} x^*(t^*) = \frac{FT^2}{mL} f^*(t^*) \quad (1.4)$$

ここで代表量 T, L, F をうまく設定することにより式を簡単にするを考える. まず, 左辺に出てくるのは T のみであるから T から決めよう. 左辺第3項の係数を1にするように T を決めると,

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.5)$$

であり, 運動方程式は,

$$\frac{d^2 x^*(t^*)}{dt^{*2}} + \frac{c}{\sqrt{mk}} \frac{dx^*(t^*)}{dt^*} + x^*(t^*) = \frac{F}{kL} f^*(t^*) \quad (1.6)$$

上式は, 右辺第2項に一つ, 左辺に一つの係数を持つ. 左辺の係数は代表量 F, L を含み, これらは自由に (自分に都合のよいように) 決めることができるから,

$$F = kL \quad (1.7)$$

が成り立つように選ぶとすると左辺の係数は1になる. さらに, 右辺第2項の係数を 2ζ とおくと,

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (1.8)$$

であり, 結局, 運動方程式は, 無次元量のみから構成される無次元化運動方程式

$$\frac{d^2 x^*(t^*)}{dt^{*2}} + 2\zeta \frac{dx^*(t^*)}{dt^*} + x^*(t^*) = f^*(t^*) \quad (1.9)$$

に単純化される.

上式に含まれるパラメータは唯一, 式 (1.8) で定義される ζ , すなわち「減衰比」であり, このシステムのダイナミクスに本質的に影響するパラメータは減衰比のみであることがわかる. 実際, 減衰比の値によって自由振動応答の様相がドラスティックに変化する (不足減衰, 過減衰, 不安定など) ことはご存じのとおりである. なお, 無次元化されたシステムにおいて「固有振動数」はどのようになっているのかといえば, 式 (1.9) の右辺第1項と第3項の係数が1であることからわかるように, 固有振動数は1 (単位なし) に規格化されているのである.

また, 式 (1.9) を導く過程において, L または F を決める自由度が残っているが, これらは問題がより簡単な形式になるよう適切に選ばばよい. たとえば, 与えられた初期変位に対する自由振動応答を求める問題なら, 初期変位を代表長さを選ぶことによって初期変位を1 (単位なし) に規格化できる. あるいは正弦波外力による定常応答を求める問題なら, 外力の振幅を代表力に選ぶことによって外力振幅を1 (単位なし) に規格化できる, という具合である.

無次元化運動方程式 (1.9) の解 $x^*(t^*)$ は無次元時間軸上の無次元変位波形である. 得られた無次元解をもとの問題に対する有次元の解に戻すためには, 式 (1.2) の第1式と第2式を使う. すなわち, これらの式を用いて無次元解のグラフの縦軸と横軸を適切にスケールリングすることによって, 元の問題に対する有次元解を得ることができる.

無次元化の効用および若干のコメントを以下にまとめておこう.

- 問題を支配する本質的なパラメータを発見できる. これによって, 不要なパラメータを減らし, 本質的でないパラメータに煩わされることを避けることができる.

- 特に、求解を数値計算に依らなければならない場合は、無次元化方程式に対して数値計算を行うことによって、無駄な計算を避けることが重要である。
- システムのふるまいを、式を解く前にある程度予想できる。たとえば上の例では、無次元時間が式 (1.5) であることから、固有振動数がその逆数 $\sqrt{k/m} \times$ 無次元定数の形を持つ（この例では exact に $\sqrt{k/m}$ である）と合理的に予想できる。演習問題 1 の [2][3] 参照。
- 方程式の各項に含まれる従属変数とその導関数や関数、および係数の大きさを相対比較することができる。次節参照。
- 代表量の選び方は一意ではなく、定まった規則もない。無次元化操作は問題に合わせて解析者の都合の良いように実施すべきものであり、物理的直観を働かせたり試行錯誤することが重要である。

1.3 非線形系の運動方程式の無次元化と項のオーダー評価

無次元化は非線形系の解析においても重要な役割を持つ。その効用は上述のものに加えて次のようなものである。

- 問題を、対象物を支配する物理やスケールに依存しない形式（いわば標準形とでもいうべき形）に帰着することができる。たとえば第 2 章で紹介するダuffing の方程式やファン・デル・ポールの方程式など。これによって、問題を純粋に数学的なものとして扱うことができ、過去に蓄積された数学的知見を自分の問題に当てはめることができる。
- 方程式の各項に含まれる変数や定数の大きさを相対比較して非線形性の強さを評価することによって、問題を非線形問題として扱うべきか、それとも線形化近似して十分か、また非線形問題として扱う場合には適切な解法を選択するための判断材料を得ることができる。

ここでは 2 番目の効用について、復元力が変位の 3 乗に依存する非線形バネを有する系の自由振動の運動方程式

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k_1x(t) + k_3x(t)^3 = 0 \quad (1.10)$$

を例にとって説明する。代表時間、代表長さ、代表力を T, L とし、無次元時間、無次元変位を t^*, x^* で表すと、前節と同様の手順によって無次元化された運動方程式

$$\frac{d^2x^*(t^*)}{dt^{*2}} + 2\zeta \frac{dx^*(t^*)}{dt^*} + x^*(t^*) + \beta x^*(t^*)^3 = 0 \quad (1.11)$$

を導くことができる。ただし、代表時間を、

$$T = \sqrt{\frac{m}{k_1}} \quad (1.12)$$

と選び、無次元パラメータ ζ, β を次のように定義した。

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk_1}} \quad (1.13)$$

$$\beta = \frac{k_3}{k_1} L^2 \quad (1.14)$$

式 (1.11) の無次元化運動方程式によって、系の非線形性の強さを特徴付けることができる。その前にまず、**オーダー評価**について説明しておく。極限操作 $x \rightarrow a$ によって無限大または無限小になる実数値関数 $f(x), g(x)$ について

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \pm\infty \quad (1.15)$$

が成り立つとき、すなわち、 $f(x)$ が $g(x)$ のたかだか定数倍程度の大きさにとどまるとき、

$$f(x) = O(g(x)), \quad (x \rightarrow a) \quad (1.16)$$

と書く。記号 O を **ランダウの記号** と呼び、「 $f(x)$ の **オーダー** は $f(x) = O(g(x))$ である」などと表現する。次に、実数値関数 $f(x), g(x)$ について

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{かつ} \quad g(x) = O(f(x)) \quad (1.17)$$

が成り立つとき、 $f(x)$ と $g(x)$ は **同じオーダー** であるといい、同値記号 \sim を用いて

$$f(x) \sim g(x) \quad (1.18)$$

と書く。

一般に、無次元化された運動方程式において、非線形項のオーダーが線形項のオーダーに比べて小さい場合、その系を **弱非線形系** と呼ぶ。逆に、非線形項のオーダーが線形項のオーダーに比べて同程度もしくは大きい場合、その系を **強非線形系** と呼ぶ。

では、式 (1.11) の無次元化運動方程式についてこの判定を行ってみよう。ここでは系の応答が代表時間 T (上の例では、非線形項を除去した系の固有周期) と同じオーダーの周期を持つとする。すると、無次元化された応答 x^* およびその導関数はいずれも同じオーダーになるので、式 (1.11) の左辺第 1 項と第 3 項のオーダーは等しい。したがって、非線形性の強さの判定は、左辺第 3 項 (線形項) と第 4 項 (非線形項) のオーダー比較によってなされることになる。

まず、左辺第 3 項 x^* が $x^* = O(1)$ のオーダー、すなわち応答変位 x が代表長さ程度の大きさの振幅を有する場合を考える。このとき、 x^{*3} もまた $x^{*3} = O(1)$ のオーダーであるから、非線形項のオーダーは係数 β のオーダーに支配される。よって、これが微小量 ε を用いて $\beta \sim \varepsilon$ と表されるとき、すなわち無次元化された非線形項の係数が十分に小さいとき、 $\beta x^{*3} = O(\varepsilon)$ でありこの系は弱非線形である。

次に、 x^* が $x^* = O(\varepsilon)$ のオーダー、すなわち応答変位 x の振幅が代表長さに比べて十分小さい場合を考える。このときは、 $x^{*3} = O(\varepsilon^3)$ となるから、たとえ係数 β が $\beta \sim \varepsilon^{-1}$ 程度に大きくても、非線形項のオーダーは $\beta x^{*3} = O(\varepsilon^2)$ であり、線形項のオーダー $x^* = O(\varepsilon)$ より小さい。同様に、応答が x^* が $x^* = O(\varepsilon^{1/2})$ 程度に小さく β が $\beta \sim 1$ のオーダーを持つ場合も、非線形項のオーダーは $\beta x^{*3} = O(\varepsilon^{3/2})$ であり、線形項のオーダー $x^* = O(\varepsilon^{1/2})$ より小さい。つまりこれらの場合も系は弱非線形である。

以上のように、非線形性の強さは、無次元化運動方程式における係数のオーダーと無次元応答のオーダーの両方に依存する。そこでこれらの量のオーダー評価を明示的に示すために、無次元微小量 ε を **bookkeeping device** として用いた表現を導入しよう。

まず最初のケースでは、応答 x^* のオーダーが $x^* = O(1)$ 、係数 β のオーダーが $\beta \sim \varepsilon$ であることを反映して、

$$x^* = x^{*'}, \quad \beta = \varepsilon \beta' \quad (1.19)$$

と置き直す。ここで ε は 1 より十分に小さい正の数である。すると、運動方程式は

$$\frac{d^2 x^{*'}(t^*)}{dt^{*2}} + 2\zeta \frac{dx^{*'}(t^*)}{dt^*} + x^{*'}(t^*) + \varepsilon \beta' x^{*'}(t^*)^3 = 0 \quad (1.20)$$

となって、非線形項が微小であることを明示的に表現することができる。上式で、 ε 以外の定数および変数はすべて $O(1)$ のオーダーを持つことに注意しよう。

第 2 のケースも同様に、

$$x^* = \varepsilon x^{*'}, \quad \beta = \varepsilon^{-1} \beta' \quad (1.21)$$

あるいは

$$x^* = \varepsilon^{1/2} x^{*'}, \quad \beta = \beta' \quad (1.22)$$

と置き直すことにより、式 (1.20) と同じ形に帰着することができる。

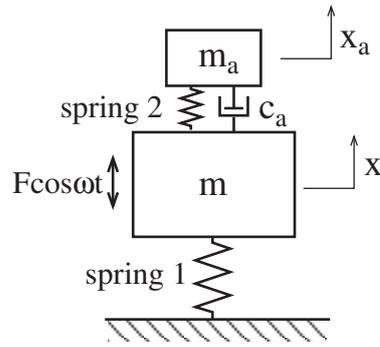


Fig. 1.1 2質点系

この講義ノートでは、必要な場合を除いて、運動方程式は適当な方法で無次元化されているとする。煩雑さを避けるため、無次元量であることを特に明示しないので注意されたい。また、オーダーを示すために無次元微小量 ε を bookkeeping device として使用し、 ε 以外の定数および変数はすべて $O(1)$ のオーダーを持つとする。

参考図書

- (1) 藪野浩司, 工学のための非線形解析入門, サイエンス社, pp. 13-35, 2004.
- (2) スタンリー・ファーロウ, 偏微分方程式, 啓学出版, pp. 172-178, 1983.

演習問題 1

[1] 図 1.1 の 2 自由度系の強制振動 (調和加振) の運動方程式を導き, 適当な方法で無次元化せよ。ただし spring 1 はバネ定数 k を持つ線形バネ, spring 2 は復元力が $k_1 z(t) + k_3 z(t)^3$ (ただし $z(t) = x_a(t) - x(t)$ とする) で与えられる非線形バネであるとせよ。

[2] 波動方程式

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.23)$$

を無次元化せよ。特定の境界条件を与えたときの固有振動数がどのような「形」を持つかを予想せよ。

[3] 長さ l の一様はりのたわみ振動の運動方程式

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = q(x, t) \quad (1.24)$$

を無次元化せよ。特定の境界条件を与えたときの固有振動数がどのような「形」を持つかを予想せよ。

第2章

非線形振動系のモデル化

2.1 非線形振動系のクラス

系の内部に作用する力（慣性力，復元力，減衰力）が状態量の1次式で表すことができない場合，その系は**非線形系**であるといい，1次式（比例）とは異なる性質を指して**非線形性**という．このとき系の運動方程式は非線形な微分方程式になる．

現実の物理現象には多かれ少なかれ非線形性が含まれる．にもかかわらず多くの場合，対象物の第1近似モデルとして線形物理モデルを採用するのは，線形系では重ね合わせの理が成り立って扱いが著しく簡単になるためである．ところが，非線形性が強くなると線形モデルでは精度よく現象を記述できなくなってくる．時には線形系では全く説明できない現象が生じることもある．そのような現象をうまく説明するためには，対象物を非線形系として，より忠実にモデル化しなければならない．

2.1.1 オートノマス系と非オートノマス系

運動方程式に独立変数（時間 t のこと）が陽に含まれていない系を**オートノマス系**といい，逆の場合を**非オートノマス系**という．線形振動系において外力 $= 0$ とした自由振動はオートノマス系の一例である．ではなぜ単に自由振動といわないかという点，ばね定数や減衰係数が時間の関数となるいわゆる**パラメータ励振系**のような，外力項（非同次項）以外の場所に独立変数を陽に含む項を持つ系と区別するためである．

1自由度非線形オートノマス系の運動方程式は次式のように表される．

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \tag{2.1}$$

ここで $f(x, \dot{x})$ はこの運動方程式の非線形項をまとめたものである．

2.1.2 保存系と非保存系

オートノマス系において，非線形項が変位 x にのみ依存する場合，この力は**保存力**であり，このような系を**保存系**という．

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{2.2}$$

両辺に速度 \dot{x} を掛けて時間について不定積分すると，

$$\int \ddot{x} \dot{x} dt + \int f(x) \dot{x} dt = E_0 \tag{2.3}$$

ここで E_0 は積分定数であり，初期時刻におけるエネルギーを表す．上式を $v = \dot{x}$ とおいて変形すると，

$$\int v dv + \int f(x) dx = E_0 \tag{2.4}$$

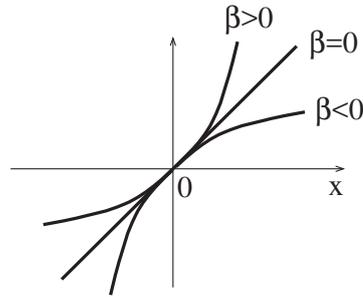


Fig. 2.1 ダッフィング系の非線形復元力

これより次式を得る.

$$T(v) + U(x) = E_0 \quad (2.5)$$

ここで, $T(v) = \frac{1}{2}v^2$, $U(x) = \int f(x)dx$ とおいた. 上式はエネルギー保存の式であり, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が一定 (初期エネルギー E_0) であることを表している. このように, 保存系においては系のエネルギーは保存され, 振動は減衰しない.

2.1.3 弱非線形系と強非線形系

第1章で述べたように, 無次元化された運動方程式において, 非線形項のオーダーが線形項のオーダーに比べて小さい場合, その系を**弱非線形系**と呼ぶ. 逆に, 非線形項のオーダーが線形項のオーダーに比べて同程度もしくは大きい場合, その系を**強非線形系**と呼ぶ. 弱非線形系の場合は, さまざまな近似解法を適用して解析的に近似解を求めることが比較的容易であるが, 強非線形系の求解は数値計算に依らざるを得ない場合が多い.

2.2 非線形な力学要素の例

2.2.1 単振り子

質量の無視できる軽い棒の先に質点を取り付け, 他端を回転支持した単振り子の運動方程式は, 振り子の回転角を θ として

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (2.6)$$

と表される. 復元力は $\sin \theta$ に比例する保存力である. 小振幅では $\sin \theta \sim \theta$ と線形近似できるが, 大振幅になると非線形性が強くなり, 特に $\pi/2 < |\theta| < \pi$ では $|\theta|$ の増加とともに復元力は減少する.

2.2.2 ハードニングばね, ソフトニングばね

変形量に対してばね定数が増加するばねを**ハードニングばね (硬化ばね)**, 減少するばねを**ソフトニングばね (軟化ばね)**という. このような特性は材料の非線形性や幾何学的非線形性によって生じる. これを近似的に3次式であらわした運動方程式

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \beta x^3) = 0 \quad (2.7)$$

を**ダッフィングの方程式**といい, このような系を**ダッフィング振動系**という. ダッフィング振動系は対称な非線形復元力の最低次近似式であり, 様々な非線形力学系のモデルとしてよく登場する. $\beta < 0$ のときソフトニングばね, $\beta = 0$ のとき線形ばね, $\beta > 0$ のときハードニングばねを表す. 幾何学的非線形性によって硬化ばね特性を持つ例を次に示そう.

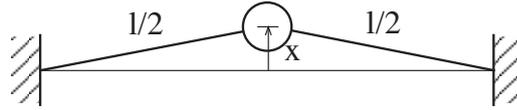


Fig. 2.2 ハードニングバネの例

ハードニングばねの例

初期張力 T_0 を与えた長さ l の軽い弦の中央に質量 m の質点を取り付けた図 2.2 のような系を考える。質点が x だけ変位したとき、弦の伸びひずみ ε は

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(\ell/2)^2 + x^2} - \ell/2}{\ell/2} \quad (2.8)$$

これによって変形後の張力 T は

$$T = T_0 + AE\varepsilon \quad (2.9)$$

となる。張力 T が作用するときの質点の運動方程式は、

$$m\ddot{x} + 2T \frac{x}{\sqrt{(\ell/2)^2 + x^2}} = 0 \quad (2.10)$$

上式に式 (2.8), (2.9) を代入し、左辺第 2 項を $x = 0$ のまわりで Taylor 展開して 3 次の項までで近似すると次式を得る。

$$m\ddot{x} + \frac{4T_0}{\ell}x + \frac{8}{\ell^3}(AE - T_0)x^3 = 0 \quad (2.11)$$

初期張力による予ひずみを ε_0 とすると、上式は、

$$m\ddot{x} + \frac{4T_0}{\ell}x + \frac{8AE}{\ell^3}(1 - \varepsilon_0)x^3 = 0 \quad (2.12)$$

と書ける。通常は $\varepsilon_0 < 1$ と期待できるから、この弦はハードニングばねとして振る舞う。

2.2.3 非線形減衰力

乾性摩擦は代表的な非線形減衰力である。これを理想化したクーロン摩擦は図 2.3 のように速度の符号のみで決まる摩擦力であり、クーロン摩擦の作用するばね質点系の運動方程式は次式のように表される。

$$\ddot{x} + F\text{sgn}(\dot{x}) + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.13)$$

ここで sgn は符号関数である。

また、次のファン・デル・ポールの方程式はリミットサイクルを持つ自励振動系のモデルとしてよく登場する。

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.14)$$

左辺第 2 項が非線形減衰項であり、粘性減衰係数が変位に依存して変化するという非線形性を有する。

2.2.4 ヒステリシス減衰

粘性型（速度振幅依存型）の減衰の他に、代表的な減衰要素として、変位振幅依存型の減衰がある。たとえばクーロン摩擦力は速度の符号のみで決まり、速度振幅には依存しないので、変位振幅依存型である。このほか、弾塑性材料の減衰、複雑な構造物に見られる構造減衰も変位振幅依存型の減衰であり、総称してヒステリシス減衰

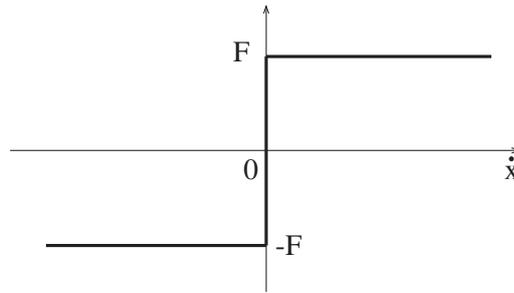


Fig. 2.3 クーロン摩擦

と呼ばれる。このような減衰要素を一定の変位振幅で変形させると、変位-復元力線図（または応力-ひずみ線図）において閉じたループ状のヒステリシス曲線が描け、1周期あたりのエネルギー損失はループの面積として計算される。したがってヒステリシス減衰要素の特性は、ヒステリシス曲線の「形」に支配されており、モデル化の際にも曲線の形をうまく表現する数学モデルを構成することが重要になる（次節参照）。通常はいくつかのパラメータを含むモデルを構成し、パラメータの値は曲線の形が実験結果にフィットするように決定される。

2.3 ヒステリシス要素

ヒステリシスとは、入力 u に対する出力 f の関係が入力の速度の符号 $\text{sgn}(\dot{u})$ に依存する性質をいう。すなわち、入力が増加する場合と減少する場合の特性が異なるような現象である。

一般に材料の応力-ひずみ特性はヒステリシス特性を持つ。つまり、材料は弾性（エネルギーを貯蔵する性質）と共に減衰（エネルギーを消費する特性）を有する。この両面性は、特に、金属材料を弾性域を超えて使用する場合や高分子材料において顕著である。このような材料のバネ特性と減衰特性を論じる場合には、応力-ひずみ特性（または変位-復元力特性）におけるヒステリシスをモデル化する必要がある。

その他、摩擦、バックラッシュ、磁性体における磁場-磁束密度特性（B-H 曲線）や圧電体の分極-電界特性（P-E 曲線）、形状記憶合金などにおける相変態特性などにおいて顕著なヒステリシスが観察される。したがって、地震時における構造物の大振幅応答を扱う場合、高分子系の材料をダンピング材料として用いる場合や、いわゆるスマート材料（圧電素子、形状記憶合金、MR/ER 流体など）を使った振動制御などを論じる場合には、ヒステリシスのモデル化が重要な問題になる。モデル化には大別して二つのアプローチがある。一つは現象を支配する物理則を解き明かしながら構築する**理論的モデリング**のアプローチである。これは現象のメカニズムを理解するために不可欠なプロセスであるが、現実の問題に応用するためには、モデルに含まれる様々な物理定数の値を同定する必要がある。もう一つは、対象を一種のブラックボックスとみなし、入出力関係をうまく模倣する数学モデルを構築する**現象論的モデリング**のアプローチである。通常、モデルにはいくつかのパラメータが含まれており、入出力関係が実験結果にフィットするように定められる。実際には両者の中間的な特徴を持つモデルも多いが、工学的応用においては現象論的アプローチが使用されることが多いようである。

代表的な現象論的モデルを以下に示す。

2.3.1 局所記憶ヒステリシスのモデル — Duhem モデル

出力 f の入力 u に関する導関数 df/du が、 u, f の値および u の時間変化の符号（増加するか減少するか）のみで決まるとき、すなわち、

$$\frac{df}{du} = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(\dot{u}))g_+(f, u) + \frac{1}{2}(1 - \text{sgn}(\dot{u}))g_-(f, u) \quad (2.15)$$

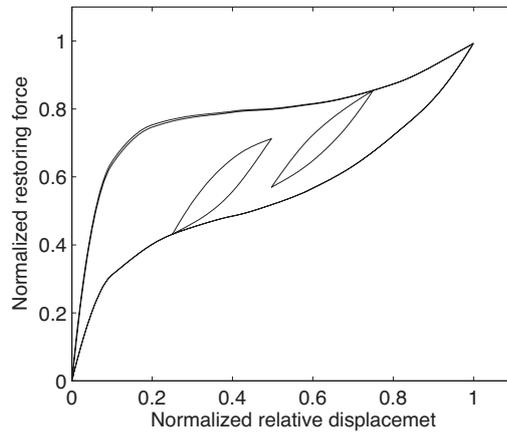


Fig. 2.4 ヒステリシス特性を持つ変位復元力関係の例（超弾性形状記憶合金バネ）

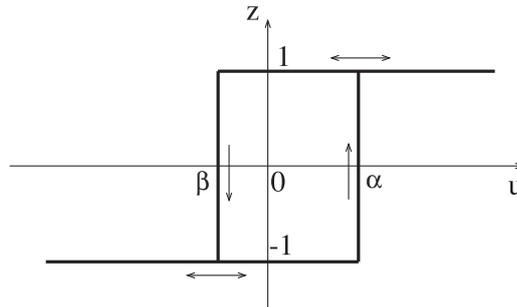


Fig. 2.5 ヒステリシスオペレータ（リレーオペレータ）

の形で書けるとき、このヒステリシスは局所記憶を持つという。時間に関する微分方程式の形で表すと、

$$\dot{f} = \left[\frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(\dot{u}))g_+(f, u) + \frac{1}{2}(1 - \text{sgn}(\dot{u}))g_-(f, u) \right] \dot{u}, \quad f(0) = f_0 \quad (2.16)$$

これを **Duhem モデル** という。上式は f に関する状態方程式であり、時刻 $t = t_0$ における $u(t_0)$, $f(t_0)$ の値と $\dot{u}(t_0)$ の符号が与えられたとき、その後の時間 ($t > t_0$) において $u(t)$ に対する $f(t)$ は一意に決まる。

弾塑性型の材料の応力-ひずみ特性（または復元力-変位特性）のモデルとして使用される Duhem 型のモデルの例を二つ示しておく。

バイリニアモデル

$$\dot{f} = [1 - U(\dot{u})U(f - 1) - U(-\dot{u})U(-f - 1)] \dot{u} \quad (2.17)$$

ここで U は単位ステップ関数である。

Bouc-Wen モデル

$$\dot{f} = A\dot{u} - \beta|\dot{u}||f|^{n-1}f - \gamma\dot{u}|f|^n \quad (2.18)$$

2.3.2 非局所記憶ヒステリシスのモデル — Preisach モデル

出力 f の入力 u に関する導関数 df/du が、現在の u , f の値および u の時間変化の符号だけでなく、過去における u の履歴に依存するとき、このヒステリシスは非局所記憶を持つという。このようなヒステリシスを表現するモデルの一つに **Preisach モデル** がある。

$$f(t) = \int \int_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \hat{\gamma}_{\alpha\beta} [u(t)] d\alpha d\beta \quad (2.19)$$

ここで μ は重み関数, $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}[\cdot]$ はヒステリシスオペレータと呼ばれるものの一種であり, $z = \hat{\gamma}_{\alpha\beta}[u]$ は, $u = \alpha$ で -1 から 1 に, $u = \beta$ で 1 から -1 に切り替わるリレー特性を持つ. Preisach モデルの式 (2.19) は, さまざまな α, β を持つリレー要素の線形な重ね合わせでヒステリシスを表現する式になっている.

演習問題 2

- [1] 式 (2.11) を導け. 適当な方法で無次元化し, ダッフティングの方程式の形に帰着せよ. さらに, 非線形性の強さを評価せよ.
- [2] バイリニアモデルと Bouc-Wen モデルについて, それぞれ Duhem 型のモデルであることを示せ.
- [3] 入力を 0 から 2 まで増加, 2 から -2 まで減少, -2 から 3 まで増加, 3 から 1 まで減少の順で変化させたとき, バイリニアモデルと Bouc-Wen モデルの出力の履歴を, 横軸を入力, 縦軸を出力として描け (概形でよい). ただし, Bouc-Wen モデルにおいては, $A = 1, \beta = \gamma = 0.5, n = 1$ とせよ.

第3章

近似解法 (1)

限られた場合を除いて、一般に非線形系の応答の厳密解を解析的に求めることは不可能である。解析的な厳密解が得られない場合に、非線形系の応答を定量的に精密に評価するための一つの方法は、数値積分によって運動方程式を具体的な初期値に対して解くことである。非線形性の種類によっては数値計算上のテクニックが必要な場合もあるものの、これはいかなる問題にも適用可能な確実な方法である。しかし、数値計算によって解を得る場合、運動方程式に含まれるパラメータの影響や初期値の影響を調べようとする、これらの値を網羅的に変化させながら計算を繰り返す他はなく、大変な労力がかかる上に、直観的にわかりにくい議論にならざるを得ない。

いっぽう、解の精度はそこそこでよいから、パラメータなどの影響を陽な形で知りたいという立場もある。工学的にはこのような「解析的近似解」のほうが有用な場合が多い。さいわい、非線形性が弱い場合は種々の近似解法が開発されており、これらを用いて定量的な議論が可能である。この章では、弱非線形系の初期値応答を求めるための解析的方法として重要ないくつかの近似解法について、一般的・概念的な説明を行う。これらの解法を実際の問題に対してどのように適用するかは後の章に譲る。また、近似解法のもう一つのカテゴリ、すなわち定常周期解を求める方法については、第8章で紹介する。

3.1 平均法

適当な技巧を用いることによって、解くべき問題を次の形の弱非線形微分方程式 (状態方程式) に帰着させることができたとして。

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad x(0) = \eta \quad (3.1)$$

ここで、 x は n 次元の実ベクトル、 ε は正の微小量、 η は与えられた初期値である。 f は適当な定義域を持つ n 次元の実ベクトル関数であり、各引数に対して2階まで連続微分可能、さらに、 t に関して周期 T の周期関数であるとする。

$$f(x, t + T, \varepsilon) = f(x, t, \varepsilon) \quad (3.2)$$

平均法は、一般に、式 (3.1) の形の微分方程式の解を、**平均化方程式**

$$\dot{x} = \varepsilon f_{av}(x), \quad x(0) = \eta \quad (3.3)$$

$$f_{av}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, 0) dt \quad (3.4)$$

の解で近似する解法である。直観的には、この操作は次のように理解できる。式 (3.1) より、 x の時間変化 \dot{x} は「微小」であるから、解の主要な部分は「ゆっくり」変化するに違いない。いっぽう、このシステムは周期 T の「加振力」を受けるから、解には周期 T の時間変動成分も含まれるはずである。つまり、解は、周期 T に比べてゆっくり変化する成分に周期 T を持つ小さな振動成分が重畳したものになる。近似解として前者のゆっくりした変化

成分, つまり解の大まかな動きのみを求めることにすれば, この成分は平均的な「加振力」すなわち式 (3.1) 第 1 式右辺の時間平均で決まるだろう. そこで, 式 (3.3) の解をもって近似解としようというわけである. あるいは, 式 (3.3) は, t に関する周期関数である f をフーリエ級数展開し, さらに微小量 ε の寄与は無視した上で, 0 次の項のみで近似したものと直観的に理解することもできるかもしれない.

次に, この近似による誤差が $O(\varepsilon)$, すなわちただか ε のオーダーであることを示しておこう. そのためにまず, 次の関数を定義する.

$$u(x, t) = \int_0^t h(x, \tau) d\tau \quad (3.5)$$

$$h(x, t) = f(x, t, 0) - f_{av}(x) \quad (3.6)$$

すなわち, $h(x, t)$ は $f(x, t, \varepsilon)$ を, 微小量 ε の寄与を無視した上で, 平均化部分 $f_{av}(x)$ で近似した際の残差, $u(x, t)$ はその積分である. $f(x, t, 0)$ は t に関して周期 T の周期関数であるから, $h(x, t)$ もまた t に関して周期 T の周期関数である. また, $h(x, t)$ は $f(x, t, 0)$ から時間平均を引き去ったものだから, 平均値は零である. さらに $u(x, t)$ はそれを積分したものであるから, 有界な周期関数である.

次の変数変換を施す.

$$x = y + \varepsilon u(y, t) \quad (3.7)$$

これを式 (3.1) に代入すると,

$$\dot{y} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(y, t) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(y, t) \dot{y} = \varepsilon f(y + \varepsilon u, t, \varepsilon) \quad (3.8)$$

\dot{y} について整理すると,

$$\left[I_n + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(y, t) \right] \dot{y} = \varepsilon f(y + \varepsilon u, t, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(y, t) \quad (3.9)$$

ここで,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(y, t) = h(y, t) = f(y, t, 0) - f_{av}(y) \quad (3.10)$$

を使うと,

$$\left[I_n + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(y, t) \right] \dot{y} = \varepsilon f_{av}(y) + \varepsilon \{ f(y + \varepsilon u, t, \varepsilon) - f(y, t, 0) \} \quad (3.11)$$

右辺第 2 項の括弧内を $p(y, t, \varepsilon)$ とおくと,

$$p(y, t, \varepsilon) = \{ f(y + \varepsilon u, t, \varepsilon) - f(y, t, \varepsilon) \} + \{ f(y, t, \varepsilon) - f(y, t, 0) \} = O(\varepsilon) \quad (3.12)$$

よって, 式 (3.11) の右辺第 2 項は $O(\varepsilon^2)$ であることがわかる. さらに, $\frac{\partial u}{\partial y}(y, t)$ は有界関数であることから,

$$\left[I_n + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(y, t) \right]^{-1} = I_n + O(\varepsilon) \quad (3.13)$$

となること考慮して, 式 (3.11) を \dot{y} について解くと,

$$\dot{y} = \varepsilon f_{av}(y) + \varepsilon^2 q(y, t, \varepsilon) \quad (3.14)$$

と書ける. ここで $q(y, t, \varepsilon)$ は有界な周期関数である. ε^2 の項を無視すると, 上式は式 (3.1) に対する平均化方程式になっている. そしてその解 y が式 (3.1) の解 x を ε のオーダーで近似する近似解になっていることが, 式 (3.7) からわかる.

$$x = y + O(\varepsilon) \quad (3.15)$$

このように, 平均法は極めて単純でありながら, 弱非線形微分方程式の 1 次近似解法として必要十分な能力を持つ. この講義ノートでも, 基本的には平均法を用いて非線形振動系の性質を調べていく. 実際には解くべき問題が最初から式 (3.1) の形をしていることは稀であって, 問題を式 (3.1) の形に帰着させるプロセスが重要であるが, これについては, 具体的な問題とともに後の章で言及する.

3.2 摂動法

微小パラメータ ε を含む次の形の非線形微分方程式（状態方程式）に帰着させることができる問題を考える。

$$\dot{x} = f(x, t, \varepsilon), \quad x(0) = \eta(\varepsilon) \quad (3.16)$$

ここで、 x は n 次元の実ベクトル、 ε は正の微小量である。 f は適当な定義域を持つ n 次元の実ベクトル関数であり、各引数に対して必要なだけの階数の微分可能性を持っているとする。また、 $\eta(\varepsilon)$ は与えられた初期値であり、 ε に関して必要なだけの階数の微分可能性を持っているとする。

摂動法は、微小なパラメータ ε を含む上のような問題を解く際に、 ε を零とした問題の解を第1近似解として、順次修正項を加えていくことにより、解を ε に関する有限次数のべき級数として、求めようとする一般的な手法である。まず、この問題に対する解を $x(t, \varepsilon)$ と書いて、これを ε についてテイラー展開する。

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + x_1(t)\varepsilon + x_2(t)\varepsilon^2 + \dots + x_{N-1}(t)\varepsilon^{N-1} + \varepsilon^N x_R(t, \varepsilon) \quad (3.17)$$

ここで右辺最後の項は残差項である。さて、上式を真の解の近似解とするためには、 x_0, \dots, x_{N-1} をどのようにして求めるかを明らかにしなければならない。また、 x_0, \dots, x_{N-1} および残差項 $x_R(t, \varepsilon)$ が $O(1)$ のオーダーに収まっていなければならない。また、初期値も ε についてテイラー展開する。

$$\eta(\varepsilon) = \eta_0 + \eta_1\varepsilon + \eta_2\varepsilon^2 + \dots + \eta_{N-1}\varepsilon^{N-1} + \varepsilon^N \eta_R(\varepsilon) \quad (3.18)$$

ただし、 $\eta_0 = \eta(0)$ である。

式 (3.17), 式 (3.18) を式 (3.16) に代入すると、

$$\sum_{k=0}^{N-1} \dot{x}_k(t)\varepsilon^k + \varepsilon^N \dot{x}_R(t, \varepsilon) = f(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \quad (3.19)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k(0)\varepsilon^k + \varepsilon^N x_R(0, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k \varepsilon^k + \varepsilon^N \eta_R(\varepsilon) \quad (3.20)$$

ここで式 (3.19) 右辺を $h(t, \varepsilon)$ と書き直して、 ε についてテイラー展開すると、

$$\sum_{k=0}^{N-1} \dot{x}_k(t)\varepsilon^k + \varepsilon^N \dot{x}_R(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k(t)\varepsilon^k + \varepsilon^N h_R(t, \varepsilon) \quad (3.21)$$

式 (3.21) および式 (3.20) は任意の小さな数 ε について成立しなければならないので、同じべきの項の係数を等値して、次式を得る。

$$\dot{x}_k(t) = h_k(t), \quad x_k(0) = \eta_k, \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (3.22)$$

形式的には上式を各 k について解けばよいのだが、 $h_k(t)$ を決めるためには解 $x(t)$ を知らなければならないので、実際には、 $k = 0$ から始めて、 $h_0 \rightarrow x_0 \rightarrow h_1 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots$ と順次求めていく、すなわち、項を順次追加して解を改良していくのである。

まず、 $k = 0$ については、 $h_0(t) = f(x_0(t), t, 0)$ であることから、式 (3.22) は、

$$\dot{x}_0(t) = f(x_0(t), t, 0), \quad x_0(0) = \eta(0) \quad (3.23)$$

となり、これを解いて0次近似解 $x_0(t)$ が得られる。次に、 $k = 1$ について、まず、 $h_1(t)$ は

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left. \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right\} \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(t), t, 0)x_1(t) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x_0(t), t, 0) \end{aligned} \quad (3.24)$$

であるから、式 (3.22) は、

$$\dot{x}_1(t) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0(t), t, 0)}_{A(t)} x_1(t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x_0(t), t, 0)}_{\text{input (excitation)}}, \quad x_1(0) = \eta_1 \quad (3.25)$$

である。これは式中に示したように時変係数行列と入力項を持つ線形の状態方程式であり、適当な方法で解くことによって1次修正項 $x_1(t)$ を求めることができる。 $k = 2$ 以上も同じプロセスを続けることによって解をより精密に改良していくことができるが、一般的な問題設定のまま、これ以上の式展開を議論するのは複雑に過ぎる。

そこで、次の1自由度弱非線形オートノマス振動系の初期値問題を考えよう。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0, \quad x(0) = \xi_0, \quad \dot{x}(0) = \nu_0 \quad (3.26)$$

まず、 $k = 0$ について、

$$\ddot{x}_0(t) + \omega_0^2 x_0(t) = 0, \quad x_0(0) = \xi_0, \quad \dot{x}_0(0) = \nu_0 \quad (3.27)$$

を解いて、

$$x_0(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \quad (3.28)$$

$k = 1$ については、まず、 $h_1(t)$ は

$$h_1(t) = \left. \frac{\partial h(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = f(x_0, \dot{x}_0) \quad (3.29)$$

と計算できるから、

$$\ddot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t) = -f(x_0, \dot{x}_0), \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0 \quad (3.30)$$

を解けばよい。 $k = 2$ 以上も同じプロセスを繰り返して計算できる。

ところが、このようにして求めた近似解は初期時刻から $t = O(1)$ のオーダーの時刻までの時間範囲でしか有効でなく、これ以上の時間が経過すると、有限次数での近似が成立しなくなってしまうという問題がある (**摂動法の破綻**)。実際、 $k = 1$ での式 (3.30) 第1式の右辺に式 (3.28) を代入すると、

$$\ddot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t) = -f(a_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0), -a_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0)), \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0 \quad (3.31)$$

上式の左辺は固有振動数が ω_0 なる線形非減衰振動系のダイナミクスを表す。 いっぽう、右辺は外力項と解釈できるが、これは基本振動数 ω_0 を持つ周期関数である。したがって、上式の解は共振解となり、 $x_1(t)$ の振幅は時間に比例して増大することになる。このような項を**永年項 (secular term)** という。

たとえば、弱い減衰を持つ線形自由振動系の初期値問題

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = \xi_0, \quad \dot{x}(0) = \nu_0 \quad (3.32)$$

では $f(x, \dot{x}) = 2\varepsilon\zeta\omega_0\dot{x}$ であり、これを式 (3.31) に適用して解くと、

$$x_1(t) = -2\varepsilon\zeta\omega_0^2 a_0 t \cos(\omega_0 t + \phi_0) \quad (3.33)$$

となり、摂動法による1次近似解は、

$$x(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) - 2\varepsilon\zeta\omega_0^2 a_0 t \cos(\omega_0 t + \phi_0) \quad (3.34)$$

となるが、一見して、厳密解

$$x(t) = a_0 e^{-\varepsilon\zeta\omega_0 t} \cos(\sqrt{1 - \varepsilon^2\zeta^2}\omega_0 t + \phi_0) \quad (3.35)$$

とはほど遠い。特に、本来 $O(\varepsilon)$ のオーダーを持つ修正項であるべき第2項が、 $t = O(1/\varepsilon)$ で $O(1)$ 、 $t = O(1/\varepsilon^2)$ で $O(1/\varepsilon)$ と時間の経過とともにいくらかでも大きくなっていくことがわかる。こうなると、解のテーラー展開 (式 (3.17)) を有限項で打ち切ることができなくなり、本手法は破綻する。

以上のように、単純な摂動法には永年項の問題が付随する。これを解決するための修正法はいろいろと提案されているが、次に述べる多重スケール法はもっともポピュラーなものの一つである。

3.3 多重スケール法

多重スケール法（または**多重尺度法**）では、異なる時間スケールを持つ複数の時間軸を用いて問題を書き換えることによって、永年項の発生を抑制する。弱い減衰を持つ線形振動系の自由振動の厳密解の式 (3.35) からわかるように、解の振幅や位相の変化は、システムの振動応答の周期にくらべて十分にゆっくりしているのが通常である。にもかかわらず、摂動法では両者を同じ時間スケール、すなわち振動応答の周期のスケールで扱っていた（あらかじめ固有周期が1のオーダーになるよう無次元化されていたことを思い出そう）。このスケールでみると振幅や位相の変化は非常にゆっくりであるため、ほとんど一定値に見えてしまう。これが摂動法による近似解（式 (3.34)）の第1項が一定振幅の正弦波になってしまっている理由である。ところが実際の厳密解では振幅が指数関数的に減少するため、時間の経過とともに第1項の近似誤差がどんどん増大してしまったのである。そこで、振動を表すための時間スケールの他に、振幅や位相の変化を表すための大きい時間スケールを用意することによって、振幅や位相に時間変化の自由度を与えようというのが多重スケール法のコンセプトである。

前節の式 (3.26) と同じ1自由度弱非線形オートノマス振動系の初期値問題を考える。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0, \quad x(0) = \xi_0, \quad \dot{x}(0) = \nu_0 \quad (3.36)$$

ここで、異なる時間スケールを持つ $m+1$ 個の時間変数を導入しよう。

$$t_k = \varepsilon^k t, \quad (k = 0, \dots, m) \quad (3.37)$$

まず $t_0 = t$ であり、元の時間軸そのものである。次に、 $t_k = O(1)$ のとき、 $t = \varepsilon^{-k} t_k$ であるから、対応する t は $O(1/\varepsilon^k)$ である。つまり、 t_1 は t_0 に比べて大きなスケールを持った（ゆっくりとした変化を表す）時間軸、 t_2 はさらに大きなスケールを持った時間軸、... に対応している。

多重スケール法では、式 (3.36) の解 x がこれら複数の時間変数を独立変数とする多変数関数であると考え。すると、時間微分は、

$$\frac{d}{dt} = \sum_{k=0}^m \frac{dt_k}{dt} \frac{\partial}{\partial t_k} = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k D_k \quad (3.38)$$

のように書ける。ここで、 $D_k = \frac{\partial}{\partial t_k}$ と定義している。あとは摂動法で行ったのと同じように x と非線形項を ε についてべき展開し、 ε^k ($k = 0, \dots, m$) についてまとめた係数部分を0として $m+1$ 個の微分方程式を得る。ただし、初期条件については各々の微分方程式についてはひとまず考えず最後に適用する。そして、 $k=0$ から始めて順次微分方程式を解いていくのだが、その過程で、複数の時間スケールを導入して得られた自由度を用いて永年項を除去する。

ここでは $m=2$ としてみよう。時間微分は、

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 \quad (3.39)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + 2\varepsilon^3 D_1 D_2 + \varepsilon^4 D_2^2 \quad (3.40)$$

となる。摂動法で行ったのと同じように x をべき展開するが、このとき x は t_0, t_1, t_2 の関数と考えるから、

$$x(t_0, t_1, t_2) = x_0(t_0, t_1, t_2) + \varepsilon x_1(t_0, t_1, t_2) + \varepsilon^2 x_2(t_0, t_1, t_2) + \dots \quad (3.41)$$

となる。このとき、これを非線形関数 $f(x, \dot{x})$ に代入したものをテイラー展開したものは、

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}) &= f(x_0, D_0 x_0) + \varepsilon f_1(x_0, D_0 x_0, D_1 x_0, x_1, D_0 x_1) \\ &+ \varepsilon^2 f_2(x_0, D_0 x_0, D_1 x_0, D_2 x_0, x_1, D_0 x_1, D_1 x_1, x_2, D_0 x_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.42)$$

と書けることに注意する. 式 (3.36) に式 (3.39)~式 (3.42) を適用し, ε のべきについてまとめて $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ の係数部分を 0 とすると, 次の 3 式を得る.

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3.43)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - f(x_0, D_0 x_0) \quad (3.44)$$

$$D_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = -2D_0 D_1 x_1 - D_1^2 x_0 - 2D_0 D_2 x_0 - f(x_0, D_0 x_0, D_1 x_0, x_1, D_0 x_1) \quad (3.45)$$

まず, 式 (3.43) は簡単に解けて,

$$x_0(t_0, t_1, t_2) = a_0(t_1, t_2) \cos\{\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)\} \quad (3.46)$$

前節の摂動法における式 (3.28) との違いは, 振幅 a_0 と位相 ϕ_0 が定数ではなく, t_1 および t_2 の関数であることである. これが多重スケール法のミソであり, かくて振幅と位相は $O(1/\varepsilon)$ および $O(1/\varepsilon^2)$ の時間スケールで変化する自由度を得ることができたのである.

次に, これを式 (3.44) に代入すると,

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= 2D_1 a_0(t_1, t_2) \omega_0 \sin(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)) + 2a_0(t_1, t_2) D_1 \phi_0(t_1, t_2) \omega_0 \cos(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)) \\ &\quad - f(a_0(t_1, t_2) \cos(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)), -a_0(t_1, t_2) \omega_0 \sin(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2))) \end{aligned} \quad (3.47)$$

右辺第 3 項は基本振動数 ω_0 を持つ周期関数であるので, これをフーリエ級数展開しておく.

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= 2D_1 a_0(t_1, t_2) \omega_0 \sin(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)) + 2a_0(t_1, t_2) D_1 \phi_0(t_1, t_2) \omega_0 \cos(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)) \\ &\quad - c_0(t_1, t_2) \\ &\quad - c_1(t_1, t_2) \cos(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)) - d_1(t_1, t_2) \sin(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)) \\ &\quad - c_2(t_1, t_2) \cos 2(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)) - d_2(t_1, t_2) \sin 2(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)) - \dots \end{aligned} \quad (3.48)$$

上式は式 (3.31) と同様に, 左辺は固有振動数が ω_0 なる線形非減衰振動系のダイナミクスを, 右辺は固有振動数に等しい基本振動数 ω_0 を持つ周期外力と解釈できる. しかし先ほどと異なるのは, 右辺の固有振動数成分, すなわち $\cos(\omega_0 t_0 + \phi_0)$ と $\sin(\omega_0 t_0 + \phi_0)$ に対して, t_1, t_2 時間関数たる $-2a_0 D_1 \phi_0 \omega_0 + c_1$ および $-2D_1 a_0 \omega_0 + d_1$ がかかっている. つまりこれらが零になる条件を課すことによって, 永年項の発生を抑制し, x_1 を $O(1)$ のオーダーにとどめることができるのである. すなわち,

$$2D_1 a_0(t_1, t_2) \omega_0 = d_1(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a(t_1, t_2) \cos \theta, -a(t_1, t_2) \omega_0 \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.49)$$

$$2a_0(t_1, t_2) D_1 \phi_0(t_1, t_2) \omega_0 = c_1(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a(t_1, t_2) \cos \theta, -a(t_1, t_2) \omega_0 \cos \theta) \cos \theta d\theta \quad (3.50)$$

であればよい. ここで, $\theta = \omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)$ とおいた. これを**可解性条件 (solvability conditions)** という. 上 2 式は, a_0, ϕ_0 の t_1 時間スケールに関する発展方程式になっている. つまりこれらを解くことによって, a_0, ϕ_0 が t_1 時間スケールでゆっくり変化する様子が明らかになる.

0 次近似解の場合は, $m = 1$ としてここまでで止める. すなわちこのときは, a_0, ϕ_0 は t_1 のみの関数と考えればよい. 式 (3.49) を $a_0(t_1)$ について解いた後, それを式 (3.50) に代入して同式を $\phi_0(t_1)$ について解き, それらを式 (3.46) に代入する. 式 (3.49) と式 (3.50) を解いた際に発生した積分定数は初期条件を使って決定する.

1 次近似解に進もう. 可解性条件を満足するとき, 式 (3.48) は次のようになる.

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -c_0(t_1, t_2) - c_2(t_1, t_2) \cos 2(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)) - d_2(t_1, t_2) \sin 2(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)) - \dots \quad (3.51)$$

これの特解は右辺の各項に対する特解（定常解でよい）を重ね合わせて求められる。

$$x_1 = -\frac{c_0(t_1, t_2)}{\omega_0^2} + \frac{c_2(t_1, t_2)}{3\omega_0^2} \cos 2(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)) + \frac{d_2(t_1, t_2)}{3\omega_0^2} \sin 2(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1, t_2)) - \dots \quad (3.52)$$

0 次近似解の場合と同じく $m = 1$ までとするならば, a_0, ϕ_0 は t_1 のみの関数と考えて式 (3.49) と式 (3.50) を解き, 解を $x = x_0 + x_1$ とし, a_0, ϕ_0 に含まれる積分定数を初期条件を使って決定すればよい。

さらに $m = 2$ まで考慮するなら, 式 (3.49) と式 (3.50) を解いた際に発生した積分定数は定数ではなく, t_2 への依存性を残している。そこでこれを決定するために, x_0 と x_1 を式 (3.45) に代入すると, 右辺には振動数 ω_0 を持つ x_0 由来の項が出現する。その係数部分が零になる条件（可解性条件）より, 式 (3.49) と式 (3.50) と同様に, a_0, ϕ_0 の t_2 時間スケールに対する二つの発展方程式を得る。これらを解く際に発生する積分定数は, 解を $x = x_0 + x_1$ とした上で, 初期条件を使って決定する。

以上の流れを振り返ってみると, 多重スケール法では, 0 次摂動解（式 (3.46)）に含まれる a_0, ϕ_0 の長い時間スケール t_1, \dots, t_m への依存性を可解性条件によって順次定めていく。k 番目の可解性条件は t_k に関する微分方程式として得られるので, 解いた際に積分定数が出現するが, それはさらに長い時間スケール t_{k+1}, \dots, t_m に依存する関数として扱われ, 最終的に t_m スケールに関する可解性条件を解いた時点で積分定数が定数として得られるので, 初期条件を適用することで解が確定する。実用的には $m = 3$ 以上が必要になることはほとんどない。

簡単な計算例として, 前節と同じ弱い減衰を持つ線形自由振動系の初期値問題（式 (3.32)）を $m = 1$ とし 0 次近似解を求めよう。式 (3.47) の具体的な形は次のようになる。

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = 2(D_1 a_0(t_1) + \zeta \omega_0 a_0(t_1)) \omega_0 \sin(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1)) + 2a_0(t_1) D_1 \phi_0(t_1) \omega_0 \cos(\omega_0 t_0 + \phi_0(t_1)) \quad (3.53)$$

そこで, 永年項が発生しないように, 次の条件をおく。

$$D_1 a_0(t_1) + \zeta \omega_0 a_0(t_1) = 0 \quad (3.54)$$

$$a_0(t_1) D_1 \phi_0(t_1) = 0 \quad (3.55)$$

これらを解くと,

$$a_0(t_1) = a_0 e^{-\zeta \omega_0 t_1} = a_0 e^{-\varepsilon \zeta \omega_0 t} \quad (3.56)$$

$$\phi_0(t_1) = \phi_0 \quad (3.57)$$

式 (3.56), 式 (3.57) を式 (3.46) に代入することにより, $O(1)$ と $O(1/\varepsilon)$ の時間スケールまで考慮した近似解が,

$$x(t) = a_0 e^{-\varepsilon \zeta \omega_0 t} \cos(\omega_0 t + \phi_0) \quad (3.58)$$

と求まる。これを厳密解（式 (3.35)）と比較すると, 振動数の部分に $O(\varepsilon^2)$ の誤差を残すのみで, よい近似であることがわかる。

参考文献

- (1) H.K. Khalil, Nonlinear systems, MacMillan, pp. 387–435, 1992.
- (2) 藪野浩司, 工学のための非線形解析入門, サイエンス社, pp. 91–106, 2004.
- (3) V. Marinca and N. Herisanu, Nonlinear Dynamical Systems in Engineering – Some Approximate Approaches, Springer, pp. 83–102, 2011.

第4章

自由振動（1）

4.1 1自由度非線形振動系の自由振動の位相平面上での定性解析

1自由度の動力学系において、系の状態を規定する状態変数は変位と速度である。変位を横軸に、速度を縦軸にとった平面を**位相平面**という。任意の時刻における系の状態は位相平面上の一点で表され、状態の時間推移は位相平面上の軌跡、すなわち**トラジェクトリ**として表現される。

位相平面を用いた図式的な解析法は、1自由度オートノマス非線形振動系の性質を理解するのに便利である。いま、1自由度オートノマス系の運動方程式が次式で表されるとする。

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (4.1)$$

$\dot{x} = v$ とおくと、式(4.1)は

$$\dot{v} = -f(x, v), \quad \dot{x} = v \quad (4.2)$$

と書けることから、

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x, v)}{v} \quad (4.3)$$

を得る。上式の左辺は相平面における傾きである。したがって元の運動方程式の解のトラジェクトリは、傾きが式(4.3)で規定されるような曲線である。式(4.3)より、次のこともわかる。

- $v \neq 0$ かつ $f(x) = 0$ でトラジェクトリの傾きは0。
- $v = 0$ かつ $f(x) \neq 0$ でトラジェクトリの傾きは ∞ 。すなわちトラジェクトリは x 軸と直交する。
- $v = 0$ かつ $f(x) = 0$ でトラジェクトリの傾きは不定となる。

トラジェクトリの傾きが不定になる点、すなわち、 $f(x, v) = v = 0$ となる点を**特異点**という。特異点においては $\dot{v} = \dot{x} = 0$ が成立するから、特異点は静的な釣り合い点、すなわち平衡点である。特異点を除けば、オートノマス系のトラジェクトリの傾きは式(4.3)により相平面の各点で一意に決められる。つまり、特異点以外の場所でトラジェクトリ同士が交わることはない。特異点にはいろいろな種類があり、その近傍領域における安定性から、結節点 (node)、渦状点 (spiral point)、中心点 (center)、鞍状点 (saddle point) に分類される。これらについては後の節で述べる。

任意の初期値から出発する解のトラジェクトリは次のようにして図式的に求めることができる。まず相平面上の各点において式(4.3)の傾きを算出し、短い線分で各点における傾きを表しておく。次に x, v の初期値を x_0, v_0 として、点 (x_0, v_0) から出発し、傾きを表す線分に接するような曲線を順次描いていくと、それが初期値 x_0, v_0 に対する解のトラジェクトリとなる(図4.1)。なお、式(4.3)の傾きが一定になるような曲線を元にしてトラジェクトリを描く図式解法を**等傾斜線法**という。

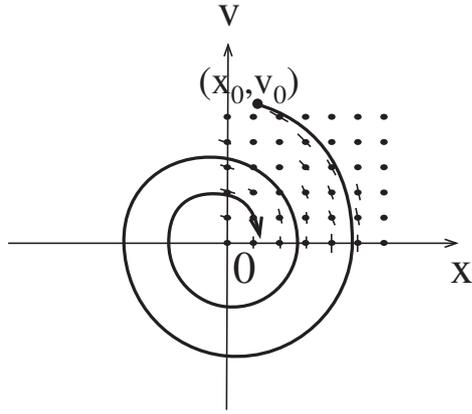


Fig. 4.1 位相平面上での図式解法

4.2 保存系の定性解析

1自由度保存系の運動方程式は

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (4.4)$$

である。両辺に速度 \dot{x} を掛けて時間について不定積分すると、

$$\int \ddot{x} \dot{x} dt + \int f(x) \dot{x} dt = E \quad (4.5)$$

ここで E は積分定数である。上式を $v = \dot{x}$ とおいて変形すると、

$$\int v dv + \int f(x) dx = E \quad (4.6)$$

これより次式を得る。

$$\frac{1}{2}v^2 + U(x) = E \quad (4.7)$$

ここで、 $U(x) = \int f(x) dx$ とおいた。上式はエネルギー保存の式であり、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が一定（初期値で決まる初期エネルギー E ）であることを表している。これを变形して、

$$v^2 = 2\{E - U(x)\} \quad (4.8)$$

これより、この系の解のトラジェクトリに関して次のことがわかる。

- トラジェクトリの x 座標は $U(x) \leq E$ となる範囲に制限される。
- トラジェクトリが x 軸と交わる点は $U(x) = E$ となる点である。
- トラジェクトリは与えられた E に対して一つ決まり、次式で与えられる。

$$v = \pm \sqrt{2\{E - U(x)\}} \quad (4.9)$$

- トラジェクトリは x 軸に関して対称である。

与えられた E に対するトラジェクトリを**レベル曲線**という。以下、典型的なポテンシャルエネルギー $U(x)$ の関数形に対するレベル曲線の形を調べていこう。

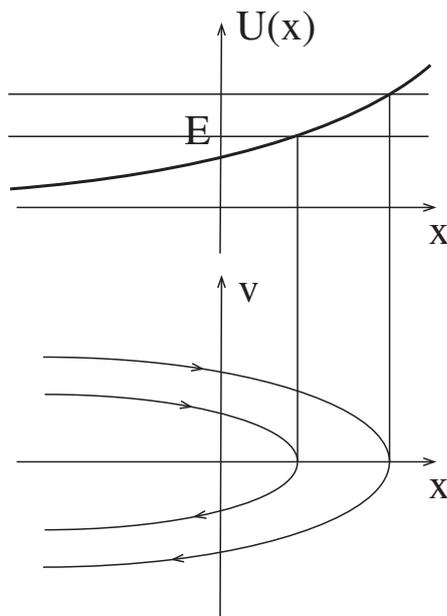


Fig. 4.2 ポテンシャルが単調増加の場合のレベル曲線

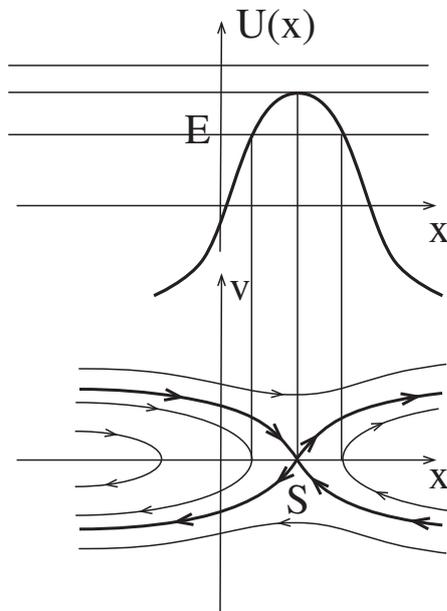


Fig. 4.3 ポテンシャルが最大点を持つ場合のレベル曲線

$U(x)$ が単調関数であるとき $U(x)$ は x に関して単調増加な関数であるとする. すると $f(x) = \frac{d}{dx}U(x)$ は常に正であるから, この系は特異点を持たない. トラジェクトリが x 軸と交わる点は $U(x) = E$ となる点である. そして式 (4.3) よりトラジェクトリの傾きは x 軸より上側で常に負, x 軸より下側で常に正である. したがってこの系のトラジェクトリは, 図 4.2 のごとく, x の負の方向に向かって外側に開いていく曲線になる. トラジェクトリは閉じていないので, 運動は振動的にならない. なお $U(x)$ が単調減少の時のレベル曲線は, 図 4.2 の上下左右が入れ替わった形になる.

$U(x)$ が最大点を持つとき $U(x)$ が図 4.3 のように唯一の最大点を持つとする. すなわちこの点で $U(x)$ の傾きはゼロ, 曲率は負である. エネルギーレベル E がポテンシャルエネルギーの最大値 U_0 を下回る ($E < U_0$) とき, レベル

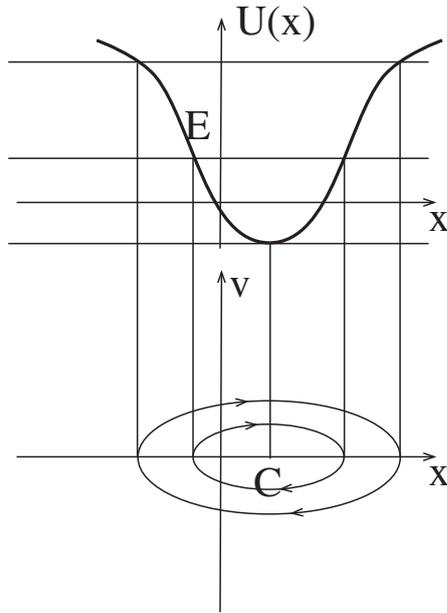


Fig. 4.4 ポテンシャルが最小点を持つ場合のレベル曲線

曲線は二つのトラジェクトリに分かれ、それぞれの形はポテンシャルエネルギーが単調増加の場合、単調減少の場合と同様になる。逆に E が U_0 を上回る ($E > U_0$) とき、レベル曲線は正の速度を持つものと負の速度を持つものに分かれ、 x 軸と交わることはない。 $E = U_0$ のとき、レベル曲線は一点で交わる四つのトラジェクトリから構成される。トラジェクトリが交差する点 S は $f(x) = v = 0$ となる特異点であり、**鞍状点 (saddle point)** と呼ばれる。鞍状点を通るこれらのトラジェクトリを**セパマトリクス (separatrix)** という。鞍状点是不安定な特異点である。

$U(x)$ が最小点を持つとき $U(x)$ が図 4.4 のように唯一の最小点を持つとする。すなわちこの点で $U(x)$ の傾きはゼロ、曲率は正である。エネルギーレベル E がポテンシャルエネルギーの最小値 U_0 を下回る ($E < U_0$) とき解は存在しない。 $E = U_0$ のときレベル曲線は一点 C に縮約する。この点は特異点であり、**中心点 (center)** と呼ばれる。 $E > U_0$ のときレベル曲線は中央点を囲む閉曲線になる。このことから中心点はリアプノフの意味で安定¹であることがわかる。中心点を囲むトラジェクトリは閉曲線なので、運動は周期的な振動になる。

$U(x)$ が傾きゼロの変曲点を持つとき $U(x)$ が傾きゼロの変曲点を持つとする。図 4.5 のように、この点の左側で $U(x)$ は上に凸、右側で下に凸とすると、レベル曲線は、鞍状点まわりのレベル曲線と中心点まわりのレベル曲線をこの点でつなぎ合わせたような形になる。この点是不安定特異点であり、縮退した特異点と呼ばれる。

以上のように、保存系における特異点は $U(x)$ の傾きがゼロとなる点に現れ、特異点での安定性はその点における $U(x)$ の曲率の符号で決まる。これを $f(x)$ に翻訳すると、特異点は $f(x) = 0$ となる点に現れ、特異点での安定性はその点における $f(x)$ の傾きの符号で決まる。正なら安定、ゼロまたは負なら不安定である。

$U(x)$ が二つの極小点の間に一つの極大点を持つとき 最後に少し込み入った例として、 $U(x)$ が図 4.6 のような場合を考える。まず $E < U_0$ のとき解は存在しない。 $E = U_0$ のときトラジェクトリは二つの中心点 C_1, C_2 に縮約する。 $U_0 < E < U_1$ のときレベル曲線は C_1, C_2 を囲む二つの閉じたトラジェクトリになる。 $E = U_1$ のとき二つのトラジェクトリが結合して、鞍状点 S を通り C_1, C_2 を囲む 8 の字型のセパマトリクスになる。そして $E > U_1$ のとき、トラジェクトリは二つの中心点と一つの鞍状点を囲む閉曲線になる。

¹相平面上の点 x_0 がリアプノフ安定であるとは、与えられた $\varepsilon > 0$ について δ が存在して、トラジェクトリ $y(t)$ が時刻 t_0 で $|y(t_0) - x_0| < \delta$ を満たすならば、 $t > t_0$ に対して $|y(t) - x_0| < \varepsilon$ であることである。

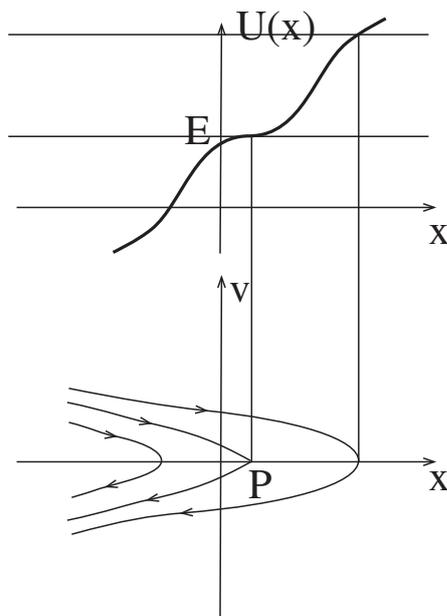


Fig. 4.5 ポテンシャルが傾きゼロの変曲点を持つ場合のレベル曲線

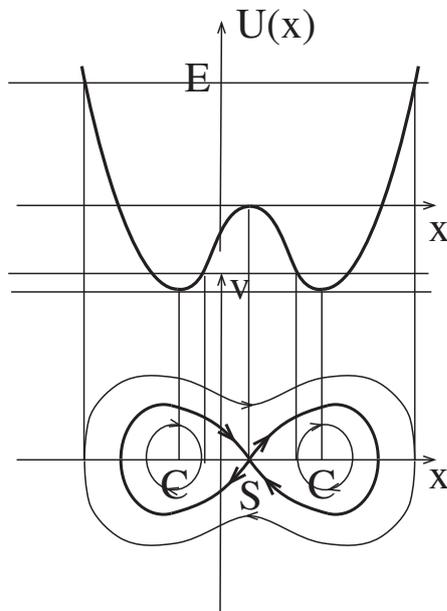


Fig. 4.6 ポテンシャルが二つの極小点の間に一つの極大点を持つ場合のレベル曲線

この例のように非線形系では初期値や系のパラメータによって応答の様式ががらりと変わることが多い。このような現象を**分岐**という。

4.3 特異点の安定性による分類

この節では特異点の分類法の一般論を述べるために、系の状態空間表現からスタートする。簡単のため次数は2とすると、系の状態方程式は次式のように書ける。

$$\dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2) \quad (4.10)$$

$$\dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2) \quad (4.11)$$

この状態空間におけるトラジェクトリ $((x_1(t), x_2(t)))$ の傾きは、上式より、

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2(x_1, x_2)}{X_1(x_1, x_2)} \quad (4.12)$$

よって、式 (4.10) と式 (4.11) の右辺が共にゼロとなる点において、トラジェクトリの傾きは不定になる。つまり、平衡点は特異点である。特異点を (x_{10}, x_{20}) とすると、

$$X_1(x_1, x_2) = 0 \quad (4.13)$$

$$X_2(x_1, x_2) = 0 \quad (4.14)$$

が成立する。

次に、特異点の近傍での解の振る舞いを調べよう。その際に、特異点近傍からスタートした解が、時間とともに特異点に近づいていくのか、それとも遠ざかっていくのか、すなわち、解の安定性に注目して議論を行う。特異点近傍の解の動きに注目するのだから、式 (4.10) と式 (4.11) で表されるもとの非線形システムを特異点近傍で**線形化近似**することを考えてみよう。特異点からの偏差を考えてこれを y_1, y_2 とおくと、

$$\dot{y}_1 = X_1(x_{10} + y_1, x_{20} + y_2) \quad (4.15)$$

$$\dot{y}_2 = X_2(x_{10} + y_1, x_{20} + y_2) \quad (4.16)$$

右辺を 1 次近似すると、 $a_{ij} = \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right|_{x_1=x_{10}, x_2=x_{20}}$ と書いて、

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \quad (4.17)$$

$$\dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \quad (4.18)$$

または

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad (4.19)$$

となり、もとの非線形システムの特異点上に原点を持ち、特異点近傍で線形化されたシステムのダイナミクスを表す式が得られる。当然ながら、得られた近似線形システムにおいては原点が特異点となる。仮に、線形化近似されたシステムの特異点の安定性が、もとのシステムのそれを受け継いでいるのなら、近似線形システムの特異点の安定性を調べることによって、もとの非線形システムの特異点の安定性を判別することができるはずである。これについてのコメントはこの節の最後で述べるとして、ここでは、式 (4.19) で表される近似線形システムの特異点（原点）における安定性を調べてみよう。

まず、システム行列 \mathbf{A} の固有値問題を考える。

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

固有値は特性方程式

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad (4.21)$$

を解いて求められる。ここで $p = a_{11} + a_{22}$, $q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ とおいて、

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0 \quad (4.22)$$

これを解くと、

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} \quad (4.23)$$

したがって、固有値は、パラメータ p, q の値によって、異なる実数、実数の重解、一对の共役な虚数、一对の共役複素数のいずれかをとる。

固有値が実数か複素数か、二つの固有値の大小や符号の関係によって、解のふるまいは大きく変化する。以下では、それぞれの場合において解の安定性とトラジェクトリの幾何学的構造を調べることにしよう。

固有値が異なる実数のとき すなわち $p^2 > 4q$. 固有値 λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルを ϕ_1, ϕ_2 とすると, 次式が成り立つ.

$$\mathbf{A}\Phi = \Phi\Lambda \quad (4.24)$$

ただし $\Phi = [\phi_1 \phi_2]$, $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2]$ である. 固有値が異なる実数であるとき, それぞれに対応する固有ベクトル同士は互いに線形独立であるから, 行列 Φ は正則である. そこで, Φ を用いて式 (4.19) に座標変換 $\mathbf{y} = \Phi\mathbf{u}$ を施すと,

$$\begin{aligned} \Phi\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{A}\Phi\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} &= \Phi^{-1}\mathbf{A}\Phi\mathbf{u} \\ &= \Lambda\mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.25)$$

のようにシステム行列を対角化できる. すなわち,

$$\dot{u}_1 = \lambda_1 u_1, \quad \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 \quad (4.26)$$

となり連成が解消されてダイナミクスが互いに独立になる.

このとき時刻 0 に点 (u_{10}, u_{20}) を通過する解は,

$$u_1 = u_{10}e^{\lambda_1 t}, \quad u_2 = u_{20}e^{\lambda_2 t} \quad (4.27)$$

$u_{10} = 0$ のとき, トラジェクトリは u_2 軸に一致する. また, $u_{20} = 0$ のとき, トラジェクトリは u_1 軸に一致する. すなわち u_1 軸または u_2 軸上から出発する解はそれぞれの軸上を推移し続けて逸脱することがない. このような直線 (一般には部分空間) を**不変部分空間**という. 特に, 不変部分空間内で原点近傍を出発した解が時間とともに原点に収束していくとき**安定部分空間**, 原点から遠ざかっていくとき**不安定部分空間**, どちらでもないとき**中心部分空間**という.

$u_{10} \neq 0$ のとき, 上式から t を消去すると,

$$u_2 = u_{20} \left(\frac{u_1}{u_{10}} \right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (4.28)$$

トラジェクトリの曲線の形を決めているのは上式の α である. また, 解の安定性は固有値の符号で決まる. つまり, トラジェクトリの形と解の推移する向きは二つの固有値の符号の組み合わせに依存する.

まず $q > 0$ のとき, 固有値は同符号, すなわち α は正であり, 全てのトラジェクトリは原点を起点または終点とする曲線になる. このような特異点は**結節点 (node)**, 特に区別して**2軸結節点 (2-tangent node)** と呼ばれる.

特に $q > 0$ かつ $p > 0$ のとき, 固有値は共に正であり, 解は時間と共に原点から遠ざかるので不安定な結節点である. また, $\alpha < 1$ であり, トラジェクトリは原点で u_2 軸に接する形となる. このとき u_1 軸および u_2 軸はともに不安定部分空間である.

逆に $q > 0$ かつ $p < 0$ のとき, 固有値は共に負であり, 解は時間と共に原点に漸近するので安定な結節点である. また, $\alpha > 1$ であり, トラジェクトリは原点で u_1 軸に接する形となる. このとき u_1 軸および u_2 軸はともに安定部分空間である.

次に $q < 0$ のとき, 固有値は異符号 ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$), すなわち u_1 軸上では解は原点から遠ざかり, u_2 軸上では解は原点に収束する. つまり u_1 軸は不安定部分空間, u_2 軸は安定部分空間である. α は負であり, トラジェクトリは u_1 軸, u_2 軸を除いて原点を通過しない. このような特異点は u_1 軸, u_2 軸を**セパトリクス**とする**鞍状点 (saddle point)** と呼ばれる. 鞍状点はもちろん不安定な特異点である.

最後に $q = 0$ のとき, $p > 0$ の場合は $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ となり, トラジェクトリは u_1 軸に平行で解は時間と共に原点から遠ざかる. このとき u_1 軸は不安定部分空間, u_2 軸は中心部分空間である. 逆に $p < 0$ の場合は $\lambda_1 = 0,$

$\lambda_2 < 0$ となり、トラジェクトリは u_2 軸に平行で解は時間と共に原点に漸近する。このとき u_1 軸は中心部分空間、 u_2 軸は安定部分空間である。

固有値が等しい実数 (重解) のとき すなわち $p^2 = 4q$ 。このとき、二つのケースが考えられる。まず、 $a_{11} = a_{22}$ かつ $a_{12} = a_{21} = 0$ の場合、この場合に限って固有ベクトルは線形独立になる。このときダイナミクスは式 (4.26) のように非連成化されるから、式 (4.27) と同様に、時刻 0 に点 (u_{10}, u_{20}) を通過する解は、

$$u_1 = u_{10}e^{\lambda t}, \quad u_2 = u_{20}e^{\lambda t} \quad (4.29)$$

と書ける。 $u_{10} = 0$ のとき、トラジェクトリは u_2 軸に一致する。また、 $u_{20} = 0$ のとき、トラジェクトリは u_1 軸に一致する。つまり、 u_1 軸と u_2 軸は不変部分空間である。 $u_{10} \neq 0$ のとき、上式から t を消去すると、

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_{20}}{u_{10}} \quad (4.30)$$

よってこのときトラジェクトリは原点を通る放射状の半直線になる。この場合も原点は特異点であり、**結節点 (node)**、特に区別して**星形結節点 (stellar node)** と呼ばれる。無論、 λ が正のとき不安定、負の時は安定な結節点である。

次に上述のケース以外の場合、固有ベクトルは線形独立でなく、システム行列を対角化することができない。この場合には、固有値を λ 、固有ベクトルを ϕ として、さらに ψ を

$$\mathbf{A}\psi = \phi + \lambda\psi \quad (4.31)$$

を満たすベクトルとしたとき、変換行列 $\mathbf{P} = [\phi \ \psi]$ によって、式 (4.19) は

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{J}\mathbf{u} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

の形に単純化できる。 \mathbf{J} は **(実) ジョルダン標準形** と呼ばれる表現形式の一種である。このとき、新しい座標系でのダイナミクスは

$$\dot{u}_1 = \lambda u_1 + u_2, \quad \dot{u}_2 = \lambda u_2 \quad (4.34)$$

となる。

式 (4.34) より、時刻 0 に点 (u_{10}, u_{20}) を通過する解は、

$$u_1 = (u_{10} + u_{20}t)e^{\lambda t}, \quad u_2 = u_{20}e^{\lambda t} \quad (4.35)$$

と書ける。 $u_{20} = 0$ のとき、トラジェクトリは u_1 軸に一致する。しかし、 $u_{10} = 0$ であっても、解は u_2 軸上を推移しない。つまり、この場合、不変部分空間は u_1 軸のみとなる。 $u_{20} \neq 0, \lambda \neq 0$ のとき、上式から t を消去すると、

$$u_1 = \left\{ \frac{u_{10}}{u_{20}} + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{u_2}{u_{20}} \right) \right\} u_2 \quad (4.36)$$

この場合も原点 (特異点) は**結節点 (node)**、特に区別して**1 軸結節点 (1-tangent node)** と呼ばれる。 λ が正のとき、すなわち $p > 0$ のとき不安定、 λ が負のとき、すなわち $p < 0$ のときは安定な結節点である。

特殊な場合として、 $p = q = 0$ のとき、 $\lambda = 0$ 。このときは式 (4.35) より、

$$u_1 = u_{10} + u_{20}t, \quad u_2 = u_{20} \quad (4.37)$$

すなわちトラジェクトリは u_1 軸に平行であり、解は $u_2 > 0$ で u_1 軸正方向に、 $u_2 < 0$ で u_1 軸負方向に等速度で動く。速度の絶対値は u_2 座標に比例し u_1 軸上では解は時間発展しない。すなわち u_1 は中心部分空間である。

固有値が一对の共役複素数のとき すなわち $p^2 < 4q$. このとき対応する二つの固有ベクトルも互いに複素共役となる. $\lambda_1 = \sigma + i\omega$ とおくと $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ であり, 時刻 0 に点 (u_{10}, u_{20}) を通過する解は, 次式のように書ける.

$$u_1 = u_{10}e^{\sigma t}e^{i\omega t}, \quad u_2 = u_{20}e^{\sigma t}e^{-i\omega t} \quad (4.38)$$

ただしこの場合, u_1, u_2 は複素数値をとる座標系であり見通しが悪いので, 次のように考える. まず, 固有ベクトルの実部と虚部をそれぞれ ϕ_r, ϕ_i と書くと, 固有値と固有ベクトルの満たすべき式から,

$$A(\phi_r + i\phi_i) = (\sigma + i\omega)(\phi_r + i\phi_i) \quad (4.39)$$

実部と虚部にかけて

$$A\phi_r = \sigma\phi_r - \omega\phi_i \quad (4.40)$$

$$A\phi_i = \omega\phi_r + \sigma\phi_i \quad (4.41)$$

上の二式を行列形式にまとめると,

$$A[\phi_r \ \phi_i] = [\phi_r \ \phi_i] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

よって, 変換行列 $P = [\phi_r \ \phi_i]$ によって座標変換すると, 式 (4.19) は

$$\dot{\mathbf{u}} = P^{-1}AP\mathbf{u} = \mathbf{J}_r\mathbf{u} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

の形に単純化できる. \mathbf{J}_r は**実ジョルダン標準形**と呼ばれる表現形式の一種である. このとき, 新しい座標系でのダイナミクスは

$$\dot{u}_1 = \sigma u_1 + \omega u_2, \quad \dot{u}_2 = -\omega u_1 + \sigma u_2 \quad (4.45)$$

となる. さらに見通しをよくするために, 極座標系に変換する. すなわち, $u_1 = r \cos \theta, u_2 = r \sin \theta$ とすると, 次式を得る.

$$\dot{r} = \sigma r, \quad \dot{\theta} = -\omega \quad (4.46)$$

したがって, 時刻 0 に点 $(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$ を通過する解は,

$$u_1 = r_0 e^{\sigma t} \cos(-\omega t + \theta_0), \quad u_2 = r_0 e^{\sigma t} \sin(-\omega t + \theta_0) \quad (4.47)$$

と書ける.

特異点は $\sigma \neq 0$ すなわち $p \neq 0$ のとき**焦点 (focus)** または**渦状点 (spiral point)** と呼ばれ, $\sigma = 0$ すなわち $p = 0$ のとき**中心点 (center)** と呼ばれる. 焦点は $\sigma > 0$ すなわち $p > 0$ のとき不安定, $\sigma < 0$ すなわち $p < 0$ のとき安定である. 中心点は漸近安定でも不安定でもない (リアプノフの意味では安定). また, これらの場合における不変部分空間は u_1 軸と u_2 軸の張る平面, すなわち状態空間そのものであり, 不安定焦点の場合は不安定部分空間, 安定焦点の場合は安定部分空間, 中心点の場合は中心部分空間となる.

以上のように, 特異点近傍での解のふるまいは, 行列 A の固有値によって決定付けられる. 固有値は式 (4.22) の係数 p, q で決まるので, (p, q) をパラメータとして図 4.7 のように特異点を分類することができる. ただし, 図 4.7 では, 星形結節点を持つ場合と $q = 0$ の場合は省略してある.

さて, このように分類された近似線形システムの特異点の安定性は, もとの非線形システムの安定性を引き継いでいるのだろうか. 実は, ある例外を除いて, 近似線形システムの安定性ともとのシステムの特異点近傍における安定性は一致することが保証されている. 例外とは, 線形システムが漸近安定でも不安定でもない不変部分

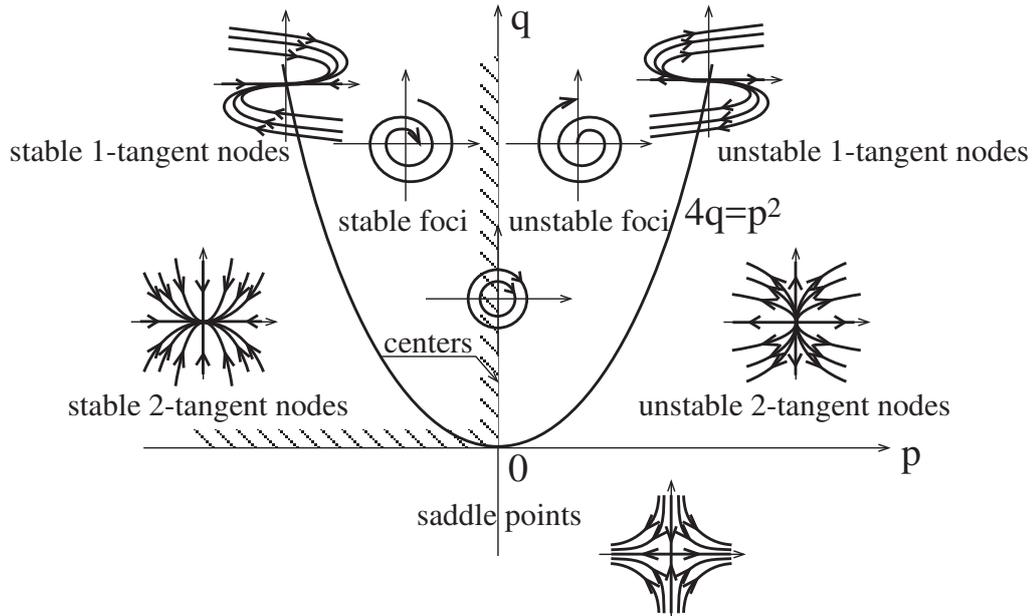


Fig. 4.7 (p, q) の値による特異点の分類

空間（中心部分空間）を持つ場合で、上の例では $p = 0$ または $q = 0$ の場合に相当する。このときは、近似線形システムの安定性を調べるだけでは、もとの非線形システムの安定性を論じることはできず、非線形性を考慮した解析が必須になる。逆に言えば、特異点の安定性を論じるときに、安定または不安定部分空間の次元の数だけの自由度については非線形解析の必要がなく、中心部分空間の次元の数だけの自由度の非線形ダイナミクスだけを調べればよいということになり、このことは特異点周りの非線形ダイナミクスの低次元化に用いられる（**中心多様体理論**）。

4.4 非保存系の定性解析

上で述べた特異点の解析によって、非保存系の自由振動の概略的な解析を行うことができる。例題を用いて説明しよう。

例題

次式で表される非線形系について、大域的な解のふるまいを求めよ。

$$\ddot{x} + \dot{x} - x + x^3 = 0 \quad (4.48)$$

まず、1階微分方程式（状態方程式）の形に書き直す。 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ として、

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.49)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1 - x_1^3 \quad (4.50)$$

1. 平衡点（=特異点）を求める

$$x_1 = x_2 = 0 \quad (4.51)$$

より、平衡点は、 $(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$ の3点である。

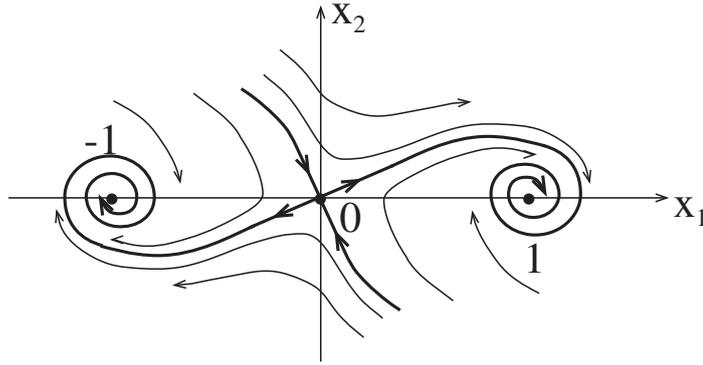


Fig. 4.8 解の大域的な振る舞い

2. 平衡点まわりで線形化

平衡点を (x_0, y_0) と表し, $x_1 = x_{10} + y_1, x_2 = x_{20} + y_2$ とおいて線形化すると,

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x_{10}^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

したがって, $(-1, 0)$ および $(1, 0)$ では,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$(0, 0)$ では,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

3. 固有値解析

固有値を λ とおいて求めると, $(-1, 0)$ および $(1, 0)$ では,

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2} \quad (4.55)$$

固有値が一对の共役複素数であり, 実部が負であるので, これらの特異点は安定な渦状点である.

また, $(0, 0)$ では,

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (4.56)$$

固有値が符号の異なる実数なので, この特異点は鞍状点である. 固有ベクトルは,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

であり, これが特異点におけるセパトリクス線の接線ベクトルとなる. 解は前者に沿って特異点に近づき, 後者に沿って特異点から遠ざかる.

4. トラジェクトリの描画

以上の知見をもとに, まず特異点近傍での解のふるまいを描き, 次に特異点以外の場所でのトラジェクトリを, トラジェクトリは x_1 軸と直交し, 上半面で右向き, 下半面で左向きであることを注意して描くと, 解の大域的なふるまいを表す図を図 4.8 のように描くことができる.

参考図書

- (1) A.H. Nayfeh and D.T. Mook, Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, pp. 39–160, 1979.
- (2) 藪野浩司, 工学のための非線形解析入門, サイエンス社, pp. 36–55, 2004.
- (3) ウィギンス, 非線形の力学系とカオス, シュプリンガー・フェアラーク東京, pp. 193–213, 2000 .

演習問題 4

- [1] 次式で表される非線形系について, $0 < \delta < \sqrt{8}$ の場合および $\delta > \sqrt{8}$ の場合における解の大域的なふるまいを求めよ. (δ の値による特異点の種類の変化に注意せよ.)

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = 0 \quad (4.58)$$

可能であれば, MATLAB か Octave を用いて, $[-2, 2] \times [-2, 2]$ の範囲の位相平面にランダムにばらまいた初期値 (100 点程度) から出発するトラジェクトリを描け.

- [2] 次式で表される非線形系の解のふるまいは, パラメータ a の値によって大きく変わる. この系の特異点を求め, a の値によって特異点がどのように変化するかを調べよ. なお, この例や上の例のように, パラメータのある値を境に系の性質が本質的に変化する現象を**分岐**という.

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^3 - 2x^2 + (1 - a)x = 0 \quad (4.59)$$

特異点の位置 (x の値) を縦軸, a を横軸にとり, 特異点の軌跡を描け. その際, 安定特異点なら実線, 不安定特異点なら破線を用いよ. このような図を**分岐図**という.

第5章

自由振動（2）

限られた場合を除いて、一般に非線形系の応答の厳密解を求めることは不可能である。しかし非線形性が小さい場合は種々の近似解法が開発されており、これらを用いて定量的な議論が可能である。非線形性が強くて近似解法が使えない場合は、いろいろな条件を変えながら数値的に解を求めることによって系の性質を調べる。

5.1 1自由度非線形振動系の自由振動の近似解法

非線形系の定量的な解析を行うためには、多くの場合、数値積分によって数値的に解を求めるか、近似的な解法を用いるしかない。ここでは自由振動の近似解法としてよく用いられる平均法、特に **Krylov-Bogoliubov 法** と呼ばれる方法について述べる。

1次元弱非線形オートノマス系の運動方程式

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0 \quad (5.1)$$

を考える。この問題に対して3.1節の平均法を適用するために、上式を式(3.1)の形に変形することを考える。まず状態方程式の形にして

$$\dot{x} = y \quad (5.2)$$

$$\dot{y} = -\omega_0^2 x - \varepsilon f(x, y) \quad (5.3)$$

ここで $\varepsilon = 0$ とすると上式は線形状態方程式になり、解は

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad y = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.4)$$

である。いまこれを母解として、 a, φ を新しい従属変数とした**定数変化法**を考える。これはすなわち、母解に対して振幅変調と周波数変調を施して解を近似しようとしていることに相当する。

式(5.4)を式(5.2)、式(5.3)に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{a} \cos \theta - a\dot{\varphi} \sin \theta &= 0 \\ -\dot{a}\omega_0 \sin \theta - a\omega_0 \dot{\varphi} \cos \theta &= -\varepsilon f(a \cos \theta, -a\omega_0 \sin \theta) \end{aligned} \quad (5.5)$$

ただし $\theta = \omega_0 t + \varphi$ とおいた。これを $\dot{a}, \dot{\varphi}$ について解くと、

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} f(a \cos \theta, -a\omega_0 \sin \theta) \sin \theta \quad (5.6)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{a\omega_0} f(a \cos \theta, -a\omega_0 \sin \theta) \cos \theta \quad (5.7)$$

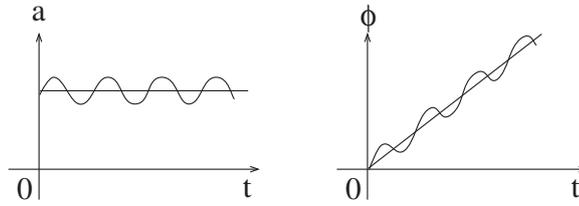


Fig. 5.1 平均法における近似

ここまでは定数変化法であり何ら近似は行っておらず、もとの x, y に関する微分方程式が a, φ に関する等価な微分方程式に置き換わっただけである。したがって、上式を積分して a, φ について解けばよいのだが、これは元の問題と同じ程度難しい。

ところで、式 (5.6), 式 (5.7) は、右辺が θ についての周期 2π の周期関数であるので、式 (3.1) の形をしている (θ を t と読み替えればよい)。そこで、次の平均化方程式 (式 (3.3) に相当) を考える。

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta, -a\omega_0 \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (5.8)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta, -a\omega_0 \sin \theta) \cos \theta d\theta \quad (5.9)$$

この近似の結果、式 (5.8), 式 (5.9) 右辺は a のみの関数となり、まず式 (5.8) の解が求まり、次にその結果を用いて式 (5.9) の解が求められる。以上の方法は特に、**Krylov-Bogoliubov の平均法**と呼ばれている。

式 (5.8), 式 (5.9) 右辺において、

$$C_e = -\frac{1}{\pi a\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta, -a\omega_0 \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (5.10)$$

$$K_e = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta, -a\omega_0 \sin \theta) \cos \theta d\theta \quad (5.11)$$

とおくと、式 (5.8), 式 (5.9) は次のように書き直される。

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon a}{2} C_e \quad (5.12)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} K_e \quad (5.13)$$

K_e, C_e は**等価ばね定数**、**等価減衰係数**と呼ばれる**等価線形パラメータ**である。これらについては第 6 章で再び扱う。

5.2 保存系の自由振動

Krylov-Bogoliubov の平均法を用いて、1 自由度弱非線形保存系の自由振動を求めてみよう。保存系の場合、等価減衰係数は $C_e = 0$ である。なぜなら、式 (5.10) より

$$C_e = \frac{1}{\pi a^2 \omega_0} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{dx}{d\theta} d\theta = \frac{1}{\pi a^2 \omega_0} \oint f(x) dx \quad (5.14)$$

であり、保存系の場合の変位-復元力特性はヒステリシスを描かないため、上式右辺の積分はゼロになるからである。したがって、

$$\dot{a} = 0 \quad (5.15)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} K_e(a) \quad (5.16)$$

振幅の初期値を a_0 とすると、式 (5.15) より、振幅は $a = a_0$ で時間に依存せず一定となる。次に、位相の初期値を φ_0 とすると、式 (5.16) より、

$$\varphi = \frac{\varepsilon K_e(a_0)}{2\omega_0} t + \varphi_0 \quad (5.17)$$

よって、解は、

$$x = a_0 \cos(\omega_n t + \varphi_0) \quad (5.18)$$

$$\omega_n = \omega_0 + \frac{\varepsilon K_e(a_0)}{2\omega_0} \quad (5.19)$$

と書ける。これより、解の振動数は振幅依存性を持つことがわかる。

ところで、式 (5.19) は、振幅 a_0 で自由振動する 1 自由度弱非線形系に平均法近似の意味で等価な 1 自由度線形系のバネ定数が、 $\omega_0^2 + \varepsilon K_e(a_0)$ であることを示唆している。なぜなら、そのような線形系の固有振動数は、

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 + \varepsilon K_e(a_0)} = \omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon \frac{K_e(a_0)}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(1 + \varepsilon \frac{K_e(a_0)}{2\omega_0^2} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (5.20)$$

と評価できるが、これはまさに、式 (5.19) に ε のオーダーで一致するからである。

例題 ダamping振動系

非減衰ダamping振動系の自由振動

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \varepsilon\beta x^3) = 0 \quad (5.21)$$

を初期条件 $x_0(0) = x_0, \dot{x}_0(0) = v_0$ のもとで平均法で解いてみよう。

まず、等価線形パラメータを求めると、

$$C_e = 0 \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} K_e &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \beta \omega_0^2 a^3 \cos^3 \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\beta \omega_0^2 a^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{3\beta \omega_0^2}{4} a^2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

よって平均化方程式は、

$$\dot{a} = 0 \quad (5.24)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{3\varepsilon\beta\omega_0}{8} a^2 \quad (5.25)$$

ここで初期条件から a と φ の初期値 a_0 と φ_0 を求めておく。すると式 (5.24) より、振幅は $a = a_0$ で時間に依存せず一定となる。これを式 (5.25) に代入して解くと、

$$\varphi = \frac{3\varepsilon\beta\omega_0}{8} a_0^2 t + \varphi_0 \quad (5.26)$$

よって、解は、

$$x = a_0 \cos \left\{ \omega_0 \left(1 + \frac{3\varepsilon\beta}{8} a_0^2 \right) t + \varphi_0 \right\} \quad (5.27)$$

となり、自由振動の振動数は振幅に依存する。 $\beta > 0$ (ハードニングばね) なら振幅 \rightarrow 大で振動数 \rightarrow 大、 $\beta < 0$ (ソフトニングばね) なら振幅 \rightarrow 大で振動数 \rightarrow 小、そしてもちろん $\beta = 0$ なら振動数は一定である。

5.3 非保存系の自由振動

非保存系の場合は $C_e \neq 0$ であり、このため、平均法による解の振幅は時間と共に変化する。これは減衰の存在する系において自由振動が平衡点に収斂することに対応する。ここではいくつかの減衰機構による振幅の時間依存性の違いに目を向けよう。

5.3.1 線形粘性減衰

運動方程式は

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (5.28)$$

であり、平均法を適用すると、

$$\dot{a} = -\varepsilon\zeta\omega_0a \quad (5.29)$$

$$\dot{\varphi} = 0 \quad (5.30)$$

を得る。これより、近似解

$$x = a_0 e^{-\varepsilon\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.31)$$

を得る。厳密解との違いに注意されたい。振幅は時間と共に指数関数的に減衰する。

5.3.2 2乗減衰

運動方程式が

$$\ddot{x} + \varepsilon\eta|\dot{x}|\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (5.32)$$

で表される系の場合、

$$\dot{a} = -\frac{4\varepsilon\eta\omega_0}{3\pi}a^2 \quad (5.33)$$

$$\dot{\varphi} = 0 \quad (5.34)$$

これを解いて、平均法による近似解

$$x = \frac{a_0}{1 + \frac{4\varepsilon\eta\omega_0 a_0}{3\pi}t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.35)$$

を得る。振動数は振幅に依存せず、振幅は時間と共にほぼ $1/t$ の速度で減衰する。

5.3.3 クーロン摩擦

運動方程式が

$$\ddot{x} + \varepsilon F \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \omega_0^2x = 0 \quad (5.36)$$

で表される系の場合、

$$\dot{a} = -\frac{2\varepsilon F}{\pi\omega_0} \quad (5.37)$$

$$\dot{\varphi} = 0 \quad (5.38)$$

これを解いて、平均法による近似解

$$x = \left(a_0 - \frac{2\varepsilon F}{\pi\omega_0}t \right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.39)$$

を得る。振動数は振幅に依存せず、振幅は時間と共に直線的に減衰する。

なお、クーロン摩擦系の自由振動の厳密解は次のようにして求められる。運動方程式を

$$\ddot{x} + \mu \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.40)$$

とする。 $\dot{x} > 0$ すなわち解が位相平面の上半面にあるときの運動方程式は、

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left(x + \frac{\mu}{\omega_0^2} \right) = 0 \quad (5.41)$$

したがって、上半面におけるトラジェクトリは $x = -\frac{\mu}{\omega_0^2}$ を平衡点とする非減衰線形系の自由振動のトラジェクトリに一致する。いっぽう、 $\dot{x} < 0$ すなわち解が位相平面の下半面にあるときの運動方程式は、

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left(x - \frac{\mu}{\omega_0^2} \right) = 0 \quad (5.42)$$

したがって、下半面におけるトラジェクトリは $x = \frac{\mu}{\omega_0^2}$ を平衡点とする非減衰線形系の自由振動のトラジェクトリに一致する。初期変位 a_0 、初期速度 0 から出発して、これらをつなぎ合わせていくと、第 n 半周期の解として

$$x = \left\{ a_0 - (2n - 1) \frac{\mu}{\omega_0^2} \right\} \cos \omega_0 t - (-1)^n \frac{\mu}{\omega_0^2} \quad (5.43)$$

を得る。解のトラジェクトリが x 軸上の $-\frac{\mu}{\omega_0^2} \leq x \leq \frac{\mu}{\omega_0^2}$ の点に至った時点で応答は停止する。

演習問題 5

[1] 式 (5.31), 式 (5.35), 式 (5.39) を導け。

[2] 運動方程式が

$$\ddot{x} + \varepsilon \{ 2\zeta\omega_0 \dot{x} + F \operatorname{sgn}(\dot{x}) \} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.44)$$

で表される系、すなわち線形粘性減衰とクーロン摩擦が同時に作用する系について、平均法により自由振動の近似解を求め、近似解 $x(t)$ のグラフ (概略でよい) を描け。

第6章

強制振動（1）

6.1 非線形振動系の調和加振に対する定常応答

非保存な（減衰のある）非線形振動系の調和加振に対する定常応答を考える。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = F \cos \omega t \quad (6.1)$$

線形振動系の場合は、 f を粘性減衰項として、

$$\ddot{x} + \varepsilon \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos \omega t \quad (6.2)$$

と書くと、定常解は

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.3)$$

ここで、

$$a = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon \delta)^2 \omega^2}} \quad (6.4)$$

$$\varphi = -\tan^{-1} \frac{\varepsilon \delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6.5)$$

となる。すなわち、加振力の振動数と同じ振動数の応答になり、それ以外の振動数成分は励起されない。ところが非線形系ではこの限りではなく、他の振動数成分も励起される。また、線形系では $\omega \approx \omega_0$ で共振が生じる。非線形系でも $\varepsilon \ll 1$ であれば $\omega \approx \omega_0$ で共振が生じることが期待できるが、実は場合によっては、 $\omega \approx \omega_0$ 以外でも共振が生じうる。このことについての解説は第7章に譲るが、それらと区別するため、 $\omega \approx \omega_0$ での共振を**主共振**という。これに対して、 $\omega \approx \omega_0$ 以外での共振を**副共振**という。

さて、これから非線形系の定常応答について考えていくが、たとえ $f(x, \dot{x})$ の具体形が陽に与えられたとしても、あらゆる加振振動数 ω やその他のパラメータの値について有効な一般解を求めることは不可能な場合がほとんどである。しかし、たとえば「主共振が生じる時の解」と限定すれば、近似解法によって解の性質を調べることができる。

6.2 平均法による主共振解の近似解法

平均法を用いて、主共振が生じているときの解、すなわち $\omega \approx \omega_0$ における解を調べよう。共振状態なので応答は加振力より十分大きいと考えて、 F を εF で置き換える。すなわち、非保存な（減衰のある）非線形振動系の調和加振に対する定常応答を考える。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = \varepsilon F \cos \omega t \quad (6.6)$$

の主共振解を平均法で求める。式 (6.6) を書き換えて、

$$\dot{x} = y \quad (6.7)$$

$$\dot{y} = -\omega_0^2 x - \varepsilon f(x, \dot{x}) + \varepsilon F \cos \omega t \quad (6.8)$$

そこでまず $\varepsilon = 0$ としたときの解を出発点にする。これは、

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad y = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (6.9)$$

であるが、ここでは、 $\omega \approx \omega_0$ であることと、強制振動に対する物理的直観を働かせて、

$$x = a \cos(\omega t + \varphi), \quad y = -a\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.10)$$

を母解とする定数変化法を考える。式 (6.8), 式 (6.8) に式 (6.10) を代入、ただし a, φ は時間関数と考え、 $\omega t + \varphi = \theta$ とおいてまとめると、

$$\dot{a} \cos \theta - a\dot{\varphi} \sin \theta = 0 \quad (6.11)$$

$$-a\dot{\omega} \sin \theta - a\dot{\varphi} \omega \cos \theta = a(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \theta - \varepsilon f + \varepsilon F \cos \omega t \quad (6.12)$$

これを $\dot{a}, \dot{\varphi}$ について解いて、 $\omega t = \theta - \varphi$ を考慮すると、

$$\dot{a} = \frac{a}{\omega}(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \theta \sin \theta + \frac{\varepsilon}{\omega} f \sin \theta - \frac{\varepsilon}{\omega} F \cos \theta \sin \theta \cos \varphi - \frac{\varepsilon}{\omega} F \sin^2 \theta \sin \varphi \quad (6.13)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\omega}(\omega_0^2 - \omega^2) \cos^2 \theta + \frac{\varepsilon}{a\omega} f \cos \theta - \frac{\varepsilon}{a\omega} F \cos^2 \theta \cos \varphi - \frac{\varepsilon}{a\omega} F \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \quad (6.14)$$

となる。さらに、 $\omega \approx \omega_0$ の仮定を思いだし、 $\omega^2 - \omega_0^2$ は ε オーダーの微小量であるとして $\omega^2 - \omega_0^2 = \varepsilon \sigma$ とおく。この σ のことを**離調パラメータ**という。

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon a}{\omega} \sigma \cos \theta \sin \theta + \frac{\varepsilon}{\omega} f \sin \theta - \frac{\varepsilon}{\omega} F \cos \theta \sin \theta \cos \varphi - \frac{\varepsilon}{\omega} F \sin^2 \theta \sin \varphi \quad (6.15)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \sigma \cos^2 \theta + \frac{\varepsilon}{a\omega} f \cos \theta - \frac{\varepsilon}{a\omega} F \cos^2 \theta \cos \varphi - \frac{\varepsilon}{a\omega} F \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \quad (6.16)$$

ここまでの過程に近似はない。

次に平均法の近似を適用する。上式の右辺全体も ε オーダーの微小量であり、さらに θ についての周期関数であるから、3.1 節の平均法が使える。上式に対する平均化方程式は、

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f \sin \theta d\theta - \frac{\varepsilon}{2\omega} F \sin \varphi \quad (6.17)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2\omega} \sigma + \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f \cos \theta d\theta - \frac{\varepsilon}{2a\omega} F \cos \varphi \quad (6.18)$$

この平均操作によって元の問題は a, φ に関するオートノマス系の問題に帰着された。上の2式は a, φ の時間変化を規定する式であり、したがってこのオートノマス系の平衡点 (特異点)、すなわち $\dot{a} = \dot{\varphi} = 0$ の解が元の問題の定常解を表すことになる。

ここで見通しをよくするため、第5章で導入した等価線形パラメータを再び使用しよう。すると、

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon a}{2} C_e - \frac{\varepsilon}{2\omega} F \sin \varphi \quad (6.19)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2\omega} \sigma + \frac{\varepsilon}{2\omega} K_e - \frac{\varepsilon}{2a\omega} F \cos \varphi \quad (6.20)$$

ただし、

$$C_e(a) = -\frac{1}{\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta, -a\omega \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (6.21)$$

$$K_e(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta, -a\omega \sin \theta) \cos \theta d\theta \quad (6.22)$$

である。

上式で $\dot{a} = \dot{\varphi} = 0$ としたときの解を a_0, φ_0 とすると、次式が定常解の振幅と位相を与える式になる。

$$\varepsilon F \sin \varphi_0 = -\varepsilon a_0 \omega C_e(a_0) \quad (6.23)$$

$$\varepsilon F \cos \varphi_0 = -a_0 \varepsilon \sigma + \varepsilon a_0 K_e(a_0) \quad (6.24)$$

これより、共振曲線を表す式

$$a_0 = \frac{\varepsilon F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2 + \varepsilon K_e)^2 + (\varepsilon C_e)^2 \omega^2}} \quad (6.25)$$

および

$$\varphi_0 = -\tan^{-1} \frac{\varepsilon C_e \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + \varepsilon K_e} \quad (6.26)$$

を得る。

上式は、形式的には線形系の場合の共振曲線の式 (6.4) および式 (6.5) と類似しており、 δ の代わりに C_e を、 ω_0^2 の代わりに $\omega_0^2 + \varepsilon K_e$ を入れた形になっている。ただし、これらの式において K_e と C_e は a_0 の関数であり、式 (6.25) は閉じた解になっていないことに注意しなければならない。また、この解は $\omega \approx \omega_0$ の仮定のもとに得られた解であり、共振点近傍でのみ有効な近似解であることに注意しよう。

C_e が ω に依存しない場合について、共振曲線を表す閉じた解を求めよう。式 (6.25) を次式のように書き換える。

$$(\varepsilon C_e)^2 \omega^2 + \{(\omega_0^2 - \omega^2) + \varepsilon K_e\}^2 = \left(\frac{\varepsilon F}{a_0}\right)^2 \quad (6.27)$$

これを与えられた a_0 に対して ω について解けばよい。オーダー評価を行うために離調パラメータを使って書き換えると、

$$(\varepsilon C_e)^2 (\varepsilon \sigma + \omega_0^2) + (-\varepsilon \sigma + \varepsilon K_e)^2 = \left(\frac{\varepsilon F}{a_0}\right)^2 \quad (6.28)$$

ε^3 の項を除外すると、

$$(C_e \omega_0)^2 + (-\sigma + K_e)^2 = \left(\frac{F}{a_0}\right)^2 \quad (6.29)$$

となり、これを σ について解くと次式を得る。

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon K_e \pm \varepsilon \sqrt{\left(\frac{F}{a_0}\right)^2 - (C_e \omega_0)^2} \quad (6.30)$$

これより次のことがわかる。

- 式 (6.30) は $\left(\frac{F}{a_0}\right)^2 - (C_e \omega_0)^2 \geq 0$ のとき実数解を持つ。したがって、共振曲線は $a_0 C_e \leq \frac{F}{\omega_0}$ が成立する領域に制限される。たとえば、 $a_0 C_e$ が a_0 について単調増加のとき、 $a_0 C_e = \frac{F}{\omega_0}$ の解を a_{\max} とすると、共振曲線は $a_0 \leq a_{\max}$ に制限される。したがって、共振曲線は唯一の極大点すなわち共振点を持つ。
- $\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon K_e$ で表される曲線は、 F, C_e に関わらず共振曲線の極大点 (共振点) が通る曲線であり、**背骨曲線 (backbone curve)** と呼ばれる。背骨曲線は振幅レベルによる固有振動数の変化を表した曲線と解釈でき、

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon \frac{K_e}{\omega_0^2}} \sim \omega_0 \left(1 + \varepsilon \frac{K_e}{2\omega_0^2}\right) = \omega_0 + \varepsilon \frac{K_e}{2\omega_0} \quad (6.31)$$

より、第5章で求めた自由振動の振動数 (すなわち固有振動数) の式 (5.19) と一致する。

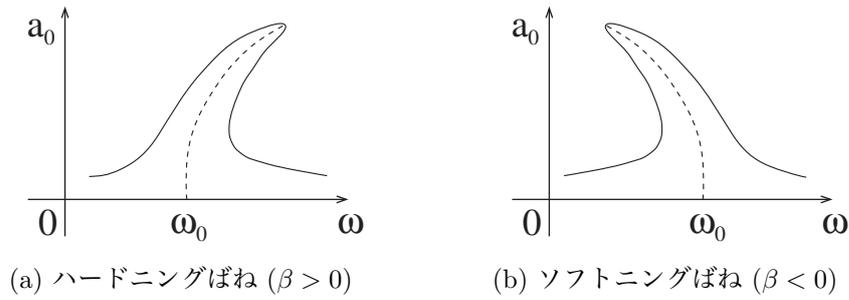


Fig. 6.1 ダッフィング系の共振曲線

例題 ダッフィング振動系

調和加振される減衰ダッフィング振動系

$$\ddot{x} + \varepsilon\delta\dot{x} + \omega_0^2(x + \varepsilon\beta x^3) = \varepsilon F \cos\omega t \quad (6.32)$$

の定常応答を平均法で解いてみよう.

この系においては, $f(x, \dot{x}) = \delta\dot{x} + \beta\omega_0^2 x^3$ と書けることに注意して, 等価線形パラメータを求めると,

$$C_e = -\frac{1}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} (-\delta a \omega \sin^2 \theta + \beta \omega_0^2 a^3 \cos^3 \theta \sin \theta) d\theta = \delta \quad (6.33)$$

$$K_e = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} (\delta a \omega \sin \theta \cos \theta + \beta \omega_0^2 a^3 \cos^4 \theta) d\theta = \frac{3}{4} \beta \omega_0^2 a^2 \quad (6.34)$$

よって, 式 (6.25), 式 (6.26) より,

$$a_0 = \frac{\varepsilon F}{\sqrt{\left\{ \omega_0^2 \left(1 + \frac{3\varepsilon\beta}{4} a_0^2 \right) - \omega^2 \right\}^2 + (\varepsilon\delta)^2 \omega^2}} \quad (6.35)$$

$$\varphi_0 = -\tan^{-1} \frac{\varepsilon\delta\omega}{\omega_0^2 \left(1 + \frac{3\varepsilon\beta}{4} a_0^2 \right) - \omega^2} \quad (6.36)$$

これを線形系の共振曲線の式 (6.4) および式 (6.5) と比較すると, 固有振動数の 2 乗 ω_0^2 の代わりに振幅依存の振動数 $\omega_0^2 \left(1 + \frac{3\varepsilon\beta}{4} a_0^2 \right)$, すなわち背骨曲線を表す振動数が入っており, 振幅の変化にともなって共振振動数が移動することがわかる. さらに, 式 (6.35) を次のように変形すると,

$$(\varepsilon\delta)^2 \omega^2 a_0^2 + \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) + \varepsilon \frac{3}{4} \beta \omega_0^2 a_0^2 \right\}^2 a_0^2 = (\varepsilon F)^2 \quad (6.37)$$

振幅の式 (6.37) は a_0^2 に関する 3 次方程式なので, $a_0 > 0$ に対する解は最大三つあることがわかる. 実際の共振曲線を模式的に描くと図 6.1 のようになる. 破線で示した曲線が背骨曲線である. $\beta > 0$ (ハードニングばね) では振幅の増加と共に固有振動数が高周波側にシフトし, $\beta < 0$ (ソフトニングばね) では逆に低周波側にシフトする様が見て取れる.

6.3 定常解の安定性と跳躍現象

以上のように, 非線形系では特定の振動数と振幅を持つ調和加振力に対して複数の定常解が存在し得ることがわかったが, これらの全てが実際に生じうるわけではない. というのは, 解の安定性の問題があり, 安定に持続しうる定常解と, 不安定な定常解があるからだ. 不安定な定常解とは, 振幅や位相に加わったわずかな擾乱が時間と共に増大するような解のことをいい, このような解は持続することができない.

定常解が式 (6.19), 式 (6.20) の平衡点として求められたことを思い出すと, 定常解の安定性を調べるには, この平衡点の安定性をチェックすればよいことがわかる. そこで, 式 (6.19), 式 (6.20) を

$$\dot{a} = A(a, \varphi) \quad (6.38)$$

$$\dot{\varphi} = \Phi(a, \varphi) \quad (6.39)$$

と表すと, 平衡点においては,

$$A(a_0, \varphi_0) = 0 \quad (6.40)$$

$$\Phi(a_0, \varphi_0) = 0 \quad (6.41)$$

次に, $a = a_0 + \Delta a$, $\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi$ として, 平衡点 (a_0, φ_0) まわりの線形化されたダイナミクスを導く.

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{a} \\ \Delta \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a(a_0, \varphi_0) & \Phi_a(a_0, \varphi_0) \\ A_\varphi(a_0, \varphi_0) & \Phi_\varphi(a_0, \varphi_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta \varphi \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

ここで,

$$A_a = \frac{\partial A}{\partial a} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial a}(aC_e) \quad (6.43)$$

$$A_\varphi = \frac{\partial A}{\partial \varphi} = -\frac{\varepsilon}{2\omega} F \cos \varphi \quad (6.44)$$

$$\Phi_a = \frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\varepsilon}{2\omega} \frac{\partial K_e}{\partial a} + \frac{\varepsilon}{2a^2\omega} F \cos \varphi \quad (6.45)$$

$$\Phi_\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\varepsilon}{2a\omega} F \sin \varphi \quad (6.46)$$

安定条件は,

$$A_a(a_0, \varphi_0) + \Phi_\varphi(a_0, \varphi_0) < 0 \quad (6.47)$$

かつ

$$A_a(a_0, \varphi_0)\Phi_\varphi(a_0, \varphi_0) - \Phi_a(a_0, \varphi_0)A_\varphi(a_0, \varphi_0) > 0 \quad (6.48)$$

である (図 4.7 参照).

まず式 (6.47) を計算すると, 式 (6.23) を考慮して,

$$A_a(a_0, \varphi_0) + \Phi_\varphi(a_0, \varphi_0) = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial a_0}(a_0C_e) - \frac{\varepsilon}{2} C_e = -\frac{\varepsilon}{2a_0} \frac{\partial}{\partial a_0}(a_0^2C_e) = -\frac{\varepsilon}{2\pi a_0\omega} \frac{\partial}{\partial a_0} D(a_0) < 0 \quad (6.49)$$

ここで $D(a_0)$ は非線形力によって 1 周期間に散逸されるエネルギーである.

$$D(a_0) = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} f(a_0 \cos \theta, -a_0\omega \sin \theta)(-a_0\omega \sin \theta) d\theta = \pi\omega a_0^2 C_e(a_0) \quad (6.50)$$

ほとんどの系では $D(a_0)$ は a_0 に対して単調増加であり, 上式が成立することが期待できる. ただし自励振動系ではこの限りではなく注意が必要である.

次に, 式 (6.48) を評価するための準備として, 共振曲線の振幅の式 (6.27) を次のように書く.

$$h(a_0, \omega) = (\varepsilon C_e)^2 \omega^2 a_0^2 + \{(\omega_0^2 - \omega^2) + \varepsilon K_e\}^2 a_0^2 - (\varepsilon F)^2 = 0 \quad (6.51)$$

まず, 式 (6.23), 式 (6.24) を考慮すると, 次式を示すことができる.

$$\frac{\partial}{\partial a_0} h(a_0, \omega) = 8\omega^2 a_0 \{A_a(a_0, \varphi_0)\Phi_\varphi(a_0, \varphi_0) - \Phi_a(a_0, \varphi_0)A_\varphi(a_0, \varphi_0)\} \quad (6.52)$$

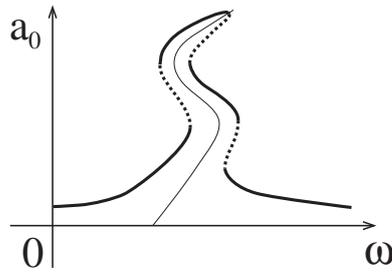


Fig. 6.2 共振曲線の安定分枝（実線）と不安定分枝（破線）

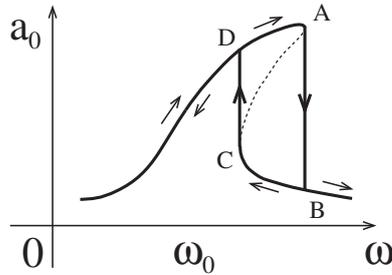


Fig. 6.3 跳躍現象

次に,

$$\frac{\partial}{\partial \omega} h(a_0, \omega) = -4a_0^2 \omega \{ (\omega_0^2 - \omega^2) + \varepsilon K_e(a_0) \} \quad (6.53)$$

ただし ε^2 の項を省略した. 式 (6.51) を a_0 で微分すると,

$$\frac{\partial}{\partial a_0} h(a_0, \omega) + \frac{\partial}{\partial \omega} h(a_0, \omega) \frac{\partial \omega}{\partial a_0} = 0 \quad (6.54)$$

これに式 (6.52), 式 (6.53) を代入すると, 次式を得る.

$$A_a(a_0, \varphi_0) \Phi_\varphi(a_0, \varphi_0) - \Phi_a(a_0, \varphi_0) A_\varphi(a_0, \varphi_0) = \frac{a_0}{2\omega} (\omega_0^2 + \varepsilon K_e - \omega^2) \frac{\partial \omega}{\partial a_0} \quad (6.55)$$

したがって, 安定条件の式 (6.48) が成立するのは,

$$\omega^2 < \omega_0^2 + \varepsilon K_e \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial \omega}{\partial a_0} > 0 \quad (6.56)$$

または

$$\omega^2 > \omega_0^2 + \varepsilon K_e \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial \omega}{\partial a_0} < 0 \quad (6.57)$$

のときである. $\frac{\partial \omega}{\partial a_0} = 0$ すなわち共振曲線の接線が垂直になる点で安定と不安定が切り替わる (図 6.2).

定常解の安定分枝と不安定分枝の存在は, 共振点付近で一見奇妙な現象を生む. 図 6.3 で説明しよう. 加振振動数を小さな値から漸増させることを考える. このとき振幅は, 共振曲線にそ沿って徐々に大きくなる. 点 A に達するとそれ以上先に安定な分枝がなくなるので, 振幅は点 B まで急激に減少する. 逆に加振振動数を大きな値から徐々に小さくする場合, 点 B を経て点 C に達すると, それ以上先に安定な分枝がなくなるので, 振幅は点 D まで急激に増加したのち, 共振曲線に沿って小さくなっていく. このように加振振動数のわずかな変化に対して振幅が急激に増減する現象を**跳躍現象 (jump phenomenon)**という. また, 跳躍を起こす振動数は振動数が大きくなる場合と小さくなる場合で異なる. これを**履歴現象**という.

第7章

強制振動（2）

7.1 副共振

第6章で触れたように、弱非線形な非線形系では加振振動数が系の固有振動数に近い場合 ($\omega \approx \omega_0$) に共振が生じるが、このほかに $\omega \approx \omega_0$ 以外の加振振動数でも共振が生じうる。これを**副共振**という。

主共振の背骨曲線、すなわち振幅依存の（等価）固有振動数 $\omega = \omega_e(a_0)$ に対して、 m, n をあまり大きくない互いに素な正の整数として、

- $\omega \approx \omega_e/m$ における共振を m 次高調波共振；
- $\omega \approx n\omega_e$ における共振を $1/n$ 次分数調波共振；
- $\omega \approx \frac{n}{m}\omega_e$ における共振を $\frac{m}{n}$ 次高分数調波共振

という。これらの一見奇妙な共振現象は、周期的に駆動された非線形項が高調波を生むことに起因する。簡単に言えば、 m 次高調波共振は、加振力によって励起された振動成分（強制振動成分）の m 次高調波と等価固有振動数で振動する成分（自由振動成分）が同調することによって生じる共振、 $1/n$ 次分数調波共振は、自由振動成分の n 次高調波が加振力と同調することによって生じる共振、そして $\frac{m}{n}$ 次高分数調波共振は、強制振動成分の m 次高調波と自由振動成分の n 次高調波が同調することによって生じる共振である。これらの共振の近似解も主共振と同様に、平均法などで求めることができ、安定性の議論もできる。

なお、その他の副共振として、加振力が複数の調和振動成分からなる場合に出現する**結合調波共振**、多自由度の弱非線形非線形振動系において出現する**内部共振**が知られている。

7.2 高調波・分数調波共振の解析

高調波共振、分数調波共振の近似解を求めるため、次の式から出発する。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = F \cos \omega t \quad (7.1)$$

ここで $\varepsilon = 0$ とした式

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F \cos \omega t \quad (7.2)$$

の解

$$x_0 = a \cos \omega t \quad a = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7.3)$$

を使って

$$x = x_0 + y \quad (7.4)$$

とおく. すると, もとの問題に等価な次式を得る.

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + \varepsilon f(a \cos \omega t + y, -a\omega \sin \omega t + \dot{y}) = 0 \quad (7.5)$$

上式に対して副共振解を仮定し, 平均法を適用する. まず, 解を $\frac{m}{n}$ 次高分数調波共振の形に仮定する.

$$y = b \cos \theta \quad \theta = \frac{m}{n} \omega t + \varphi \quad (7.6)$$

$$\dot{y} = -\frac{m}{n} b \omega \sin \theta \quad (7.7)$$

これらを式 (7.5) に代入して定数変化法を適用し, 整理すると, 次式を得る.

$$\dot{b} = \frac{n}{m} \frac{b}{\omega} \left\{ \omega_0^2 - \left(\frac{m}{n} \right)^2 \omega^2 \right\} \cos \theta \sin \theta + \frac{n}{m} \frac{\varepsilon}{\omega} f \sin \theta \quad (7.8)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{n}{m} \frac{1}{\omega} \left\{ \omega_0^2 - \left(\frac{m}{n} \right)^2 \omega^2 \right\} \cos^2 \theta + \frac{n}{m} \frac{\varepsilon}{b\omega} f \cos \theta \quad (7.9)$$

$\omega t = \frac{n}{m}(\theta - \varphi)$ であるから右辺は θ についての周期 $2\pi m$ の周期関数であることに留意して平均法の近似を適用すると,

$$\dot{b} = \frac{n}{m} \frac{\varepsilon}{2\pi m \omega} \int_0^{2\pi m} f \sin \theta d\theta \quad (7.10)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{n}{m} \frac{\varepsilon}{2\omega} \sigma + \frac{n}{m} \frac{\varepsilon}{2\pi m b \omega} \int_0^{2\pi m} f \cos \theta d\theta \quad (7.11)$$

ただしここで, σ は次式で定義される**離調パラメータ**である.

$$\varepsilon \sigma = \left(\frac{m}{n} \right)^2 \omega^2 - \omega_0^2 \quad (7.12)$$

式 (7.10), 式 (7.11) はオートノマス系であり, この平衡点を求めることによって定常解の振幅と位相を決めることができる. また主共振の場合と同様に, 得られた解の安定判別を行うことができる.

例題 ダツフイング振動系

調和加振される減衰ダツフイング振動系

$$\ddot{x} + \varepsilon \delta \dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon \beta x^3 = F \cos \omega t \quad (7.13)$$

の副共振応答を平均法で解いてみよう. 上で説明したように,

$$x_0 = a \cos \omega t \quad a = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7.14)$$

を使って

$$x = x_0 + y \quad (7.15)$$

とおくと,

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + \varepsilon f(a \cos \omega t + y, -a\omega \sin \omega t + \dot{y}) = 0 \quad (7.16)$$

を得る. ここで, $f(x, \dot{x}) = \beta x^3 + \delta \dot{x}$ より, $f(a \cos \omega t + y, -a\omega \sin \omega t + \dot{y})$ を計算すると,

$$\begin{aligned} f(a \cos \omega t + y, -a\omega \sin \omega t + \dot{y}) &= \delta \dot{y} + \frac{3}{2} \beta a^2 y + \beta y^3 \\ &\quad - \delta a \omega \sin \omega t + \beta \left(3y^2 + \frac{3}{4} a^2 \right) a \cos \omega t \\ &\quad + \frac{3}{2} \beta a^2 y \cos 2\omega t + \frac{1}{4} \beta a^3 \cos 3\omega t \end{aligned} \quad (7.17)$$

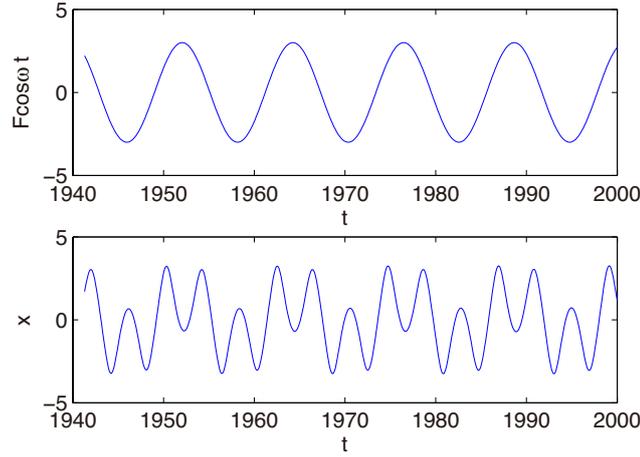


Fig. 7.1 3次高調波共振の応答波形（上段：外力，下段：応答）

副共振解を仮定して

$$y = b \cos \theta \quad \theta = \frac{m}{n} \omega t + \varphi \quad (7.18)$$

を適用すると、

$$\begin{aligned} f = & -\frac{m}{n} \delta b \omega \sin \theta + \frac{3}{2} \beta a^2 b \cos \theta + \beta b^3 \cos^3 \theta \\ & - \delta a \omega \sin \frac{n}{m} (\theta - \varphi) + \beta \left(3b^2 \cos^2 \theta + \frac{3}{4} a^2 \right) a \cos \frac{n}{m} (\theta - \varphi) \\ & + \frac{3}{2} \beta a^2 b \cos \theta \cos \frac{2n}{m} (\theta - \varphi) + \frac{1}{4} \beta a^3 \cos \frac{3n}{m} (\theta - \varphi) \end{aligned} \quad (7.19)$$

を得る。副共振が生じるのは次の二つの場合である。

$m = 3, n = 1$ の場合（3次高調波共振）

このとき式 (7.10) を計算すると、式 (7.10) の積分のうち式 (7.19) 右辺の第1項、第7項に関連する項のみが残る。

$$\dot{b} = \frac{\varepsilon}{2\omega} \left(-\delta b \omega + \frac{\beta a^3}{12} \sin \varphi \right) \quad (7.20)$$

また、式 (7.11) を計算すると、式 (7.11) の積分のうち式 (7.19) 右辺の第2項、第3項、第7項に関連する項のみが残る。

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\omega b} \left\{ -\left(\frac{\sigma}{3} - \frac{\beta a^2}{2} \right) b + \frac{\beta b^3}{4} + \frac{\beta a^3}{12} \cos \varphi \right\} \quad (7.21)$$

式 (7.20), 式 (7.21) の平衡点を b_0, φ_0 とすると、 b_0, φ_0 は次式を満たす。

$$(\delta \omega)^2 + \left\{ \frac{\sigma}{3} - \beta \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b_0^2}{4} \right) \right\}^2 = \frac{\beta^2 a^6}{144 b_0^2} \quad (7.22)$$

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \frac{\delta \omega}{\frac{\sigma}{3} - \beta \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b_0^2}{4} \right)} \quad (7.23)$$

$\omega^2 = \frac{1}{9} (\varepsilon \sigma + \omega_0^2)$ に注意して、式 (7.22) を σ について解くと、

$$\sigma = 3\beta \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b_0^2}{4} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\beta a^3}{4b_0} \right)^2 - (\delta \omega_0)^2} \quad (7.24)$$

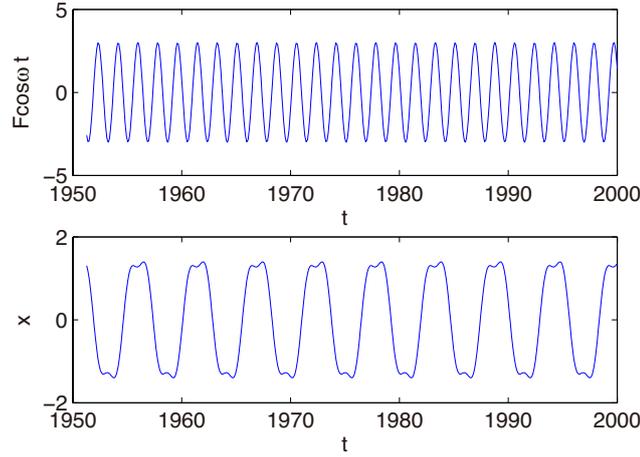


Fig. 7.2 1/3 次分数調波共振の応答波形（上段：外力，下段：応答）

ただし計算途中で ε のオーダーの項を省略している．根号の中が非負になる条件より，振幅の極大値は

$$b_0 = \frac{|\beta a^3|}{4\delta\omega_0} \quad (7.25)$$

と求まる．さらに，極大点の通る曲線，すなわち背骨曲線は

$$\omega^2 = \left(\frac{\omega_0}{3}\right)^2 + \varepsilon \frac{1}{3}\beta \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b_0^2}{4}\right) \simeq \frac{1}{9} \left(\omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4}\beta b_0^2\right) = \frac{1}{9} (\omega_0^2 + \varepsilon K_e) = \left(\frac{\omega_e}{3}\right)^2 \quad (7.26)$$

となり，主共振の背骨曲線を振動数方向に 1/3 縮小したものに近い．さらに安定判別を行うと，主共振と同様に，共振曲線の底の裏側にあたる分枝は不安定になることがわかる．以上の振幅，位相を用いて，3 次高調波解は

$$x = a \cos \omega t + b_0 \cos (3\omega t + \varphi) \quad (7.27)$$

となる．

応答の例として， $\omega_0 = 1$, $\varepsilon\zeta = 0.01$, $\varepsilon\beta = 0.2$, $F = 3$, $\omega = 0.515$, $x(0) = 1.2$, $\dot{x}(0) = 0$ としたときの定常状態での応答を数値積分によって求めたものを図 7.1 に示す．外力に同調する成分よりも 3 倍の高調波が卓越していることがわかる．

$m = 1, n = 3$ の場合 (1/3 次分数調波共振)

このとき式 (7.10) を計算すると，式 (7.10) の積分のうち式 (7.19) 右辺の第 1 項，第 5 項に関連する項のみが残る．

$$\dot{b} = \frac{\varepsilon}{2\omega} \left(-\delta b\omega + \frac{9\beta ab^2}{4} \sin 3\varphi\right) \quad (7.28)$$

また，式 (7.11) を計算すると，式 (7.11) の積分のうち式 (7.19) 右辺の第 2 項，第 3 項，第 5 項に関連する項のみが残る．

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\omega b} \left\{ -\left(3\sigma - \frac{9\beta a^2}{2}\right) b + \frac{9\beta b^3}{4} + \frac{9\beta ab^2}{4} \cos 3\varphi \right\} \quad (7.29)$$

式 (7.28), 式 (7.29) の平衡点を b_0, φ_0 とすると， b_0 は次式を満たす．

$$\left[(\delta\omega)^2 + \left\{ 3\sigma - 9\beta \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b_0^2}{4}\right) \right\}^2 \right] b_0^2 = \frac{81\beta^2 a^2 b_0^4}{16} \quad (7.30)$$

$\omega^2 = 9(\varepsilon\sigma + \omega_0^2)$ に注意して，これを解くと， $b_0 = 0$ または，

$$9(\delta\omega_0)^2 + \left\{ 3\sigma - 9\beta \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b_0^2}{4}\right) \right\}^2 = \frac{81\beta^2 a^2 b_0^2}{16} \quad (7.31)$$

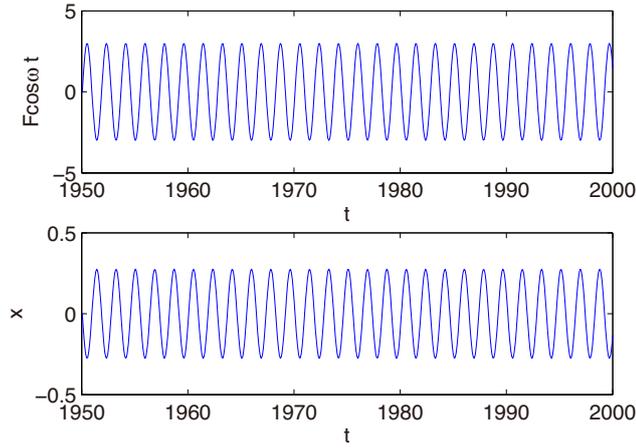


Fig. 7.3 1/3 次分数調波が励起されない場合の応答波形（上段：外力，下段：応答）

式 (7.31) を σ について解くと，

$$\sigma = 3\beta \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b_0^2}{4} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{3\beta ab_0}{4} \right)^2 - (\delta\omega_0)^2} \quad (7.32)$$

ただし計算途中で ε のオーダーの項を省略している．根号の中が非負になる条件より，振幅の極小値は

$$b_0 = \frac{4\delta\omega_0}{3|\beta a|} \quad (7.33)$$

と求まる．さらに，極小点の通る曲線，すなわち背骨曲線は

$$\omega^2 = 9 \left\{ \omega_0^2 + \varepsilon 3\beta \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b_0^2}{4} \right) \right\} \simeq 9 \left(\omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4} \beta b_0^2 \right) = 9 (\omega_0^2 + \varepsilon K_e) = (3\omega_e)^2 \quad (7.34)$$

となり，主共振の背骨曲線を振動数方向に 3 倍伸張したものに近い．解の安定性も同様の手順で判別できる． b_0 が 0 となるか式 (7.32) で与えられるものになるかは初期値に依存する．

応答の例として， $\omega_0 = 1$, $\varepsilon\zeta = 0.01$, $\varepsilon\beta = 0.2$, $F = 3$, $\omega = 3.45$, $x(0) = 1.2$, $\dot{x}(0) = 0$ としたときの定常状態での応答を数値積分によって求めたものを図 7.2 に示す．外力に同調する成分よりも 1/3 倍の分数調波が卓越していることがわかる．また，同じ加振振動数で初期値が異なる場合の例として， $\omega_0 = 1$, $\varepsilon\zeta = 0.01$, $\varepsilon\beta = 0.2$, $F = 3$, $\omega = 3.45$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$ としたときの定常状態での応答を図 7.3 に示す．これは $b_0 = 0$ となる場合であり，分数調波振動は励起されていないことがわかる．図 7.2 との応答振幅の違いに注目されたい．

第8章

近似解法（2）

線形系の場合と同様に、非線形系においても定常応答解析は重要である。線形系で定常応答というと、正弦波状の強制加振を受ける系の、十分な時間を経て自由振動の影響が消滅した後の、周期的な応答のことであった。非線形系においても正弦波状の強制加振を受ける系の周期応答が問題になる場合が多い。さらに、外部から加振を受けない系（第2章の分類でいうとオートノマス系）においても周期応答が発生する場合がある（第10章の自励振動系におけるリミットサイクル）。

この章では、非線形系の周期解を求めるための近似解法を簡単に紹介する。このうち、調和バランス法とシューティング法は弱非線形系だけでなく、強非線形系にも適用可能な強力な解法である。

8.1 調和バランス法

調和バランス法は、非線形系の周期解を求めるための方法であり、項数の追加により解を任意の精度で求めることができる。またこの手法は、かなり広いクラスの前線形系に対して有効であり、強非線形の問題や多自由度の問題にも容易に適用できる。

ここでは解きたい方程式を、非オートノマスの状態方程式

$$\dot{x} = f(x, \omega t) \quad (8.1)$$

であるとしよう。ただし f は t について周期 $T = 2\pi/\omega$ を持つ周期関数であり、状態ベクトル x と時間 t について十分になめらかであるとする。これに対して、周期 kT (k は自然数) の周期解を求めることを考える。解を次の形で仮定する。

$$x = \sum_m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) \quad \theta = \frac{\omega t}{k} \quad (8.2)$$

ただし m は有限次数で打ち切る。これを式 (8.1) に代入すると、

$$\dot{x} = f(x, k\theta) \quad (8.3)$$

の両辺は θ に関する周期 2π の周期関数になる。両辺をフーリエ級数展開して係数を等置すると、

$$\int_0^{2\pi} \{\dot{x} - f(x, k\theta)\} \cos m\theta d\theta = 0 \quad (8.4)$$

$$\int_0^{2\pi} \{\dot{x} - f(x, k\theta)\} \sin m\theta d\theta = 0 \quad (8.5)$$

を得る。上式はフーリエ係数ベクトル a_m, b_m を未知数とするちょうどその個数だけの非線形連立方程式であり、特に f が $x, \cos \omega t, \sin \omega t$ の多項式であれば、連立代数方程式である。この非線形連立方程式を解いて a_m, b_m を

求め、式 (8.2) に戻して定常解の近似解を得ることができる。なお、状態空間の次元が大きいときや解の展開次数が大きいときはニュートン法などの数値解法を用いて式 (8.4)、式 (8.5) を解くことになる。

この手法は、いわゆる**ガラーキソ法**の特殊な場合であり、関数展開の基底関数列として三角関数を用いた場合に相当する。

8.2 等価線形化法

等価線形化法も周期解を求める近似解法であり、調和バランス法において高調波成分を省略し、最低次の調和関数成分だけで近似したものに相当する。また、平均法の第一近似とも一致する。したがって弱非線形系でしか満足な結果を得られないが、以下に述べるように近似式に物理的な意味づけを与えることができるため、解釈がしやすいという利点がある。主共振解やリミットサイクル解の第一近似を求めるために使用される。

ここでは次の非線形強制振動系を例にとりて説明する。非線形項を含む運動方程式

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F \cos \omega t \quad (8.6)$$

において、左辺を線形系の式で近似した次の近似表現を考える。

$$m\ddot{x} + C_e \dot{x} + K_e x = F \cos \omega t \quad (8.7)$$

その際、解を周期解

$$x = a \cos \theta, \quad \theta = \omega t + \varphi \quad (8.8)$$

と仮定して、式 (8.7) の両辺の式誤差の一周期における二乗積分が最小になるように K_e, C_e を決める。すなわち、評価関数を

$$J = \int_0^{2\pi} \{f(x, \dot{x}) - (C_e \dot{x} + K_e x)\}^2 d\theta \quad (8.9)$$

として、 J を最小にする K_e, C_e を求める。停留条件 $\frac{\partial J}{\partial K_e} = 0, \frac{\partial J}{\partial C_e} = 0$ より直ちに、次式を得る。

$$K_e = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta, -a\omega \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (8.10)$$

$$C_e = -\frac{1}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta, -a\omega \sin \theta) \cos \theta d\theta \quad (8.11)$$

このようにして求めた K_e, C_e を等価バネ定数、等価減衰係数という。 K_e は $x-f$ グラフの平均的傾きに、 C_e は $x-f$ グラフの囲む面積（損失エネルギー）に関連する量であり、いずれも振幅依存性を持つ。これらの等価線形パラメータは平均法の説明の時に導入したのと同じである。この操作により、元の非線形系を、振幅に依存するバネ定数、減衰係数を持つ線形系として扱っていることになり、形式上、線形系と同じように議論を展開することができる。

8.3 シューティング法

シューティング法は、周期解を求める問題を2点境界値問題として解釈することによって、広範なクラスの非線形系の周期解を求めることができる手法であり、通常は数値計算を駆使して実行される。

ここでは次のような非オートノマスの状態方程式

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (8.12)$$

の周期解を求めることを考える。ただし f は t について周期 T を持つ周期関数であり、状態ベクトル x と時間 t について十分に定めらかであるとする。これに対して、周期 kT (k は自然数) の周期解を求めることを考える。

いま, x_0 を時刻 $t = 0$ における初期値ベクトルとする. この初期値を出発する解を, x_0 をパラメータと考えて $x(t, x_0)$ と書く. これが周期 kT の周期解であるためには,

$$x(kT, x_0) = x_0 \quad (8.13)$$

でなければならない. すなわち, 所望の周期解を求める問題は, 上式を満たす初期値ベクトル x_0 を求める問題に帰着される. シューティング法では上式を満たす x_0 をニュートン法を使って逐次的に求めていく. いま, m ステップ目の初期値ベクトルを x_0^m と書いて, その改良によって式 (8.13) を満たす初期値ベクトルを求めることとする. 改良値を δx_0^m と書いて, $x_0 = x_0^m + \delta x_0^m$ を式 (8.13) に代入すると,

$$x(kT, x_0^m + \delta x_0^m) = x_0^m + \delta x_0^m \quad (8.14)$$

上式左辺を δx_0^m について展開して1次近似すると,

$$x(kT, x_0^m) + \left. \frac{\partial x(kT, x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=x_0^m} \delta x_0^m = x_0^m + \delta x_0^m \quad (8.15)$$

よって, 初期値の修正量は,

$$\delta x_0^m = - \left\{ \left. \frac{\partial x(kT, x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=x_0^m} - I \right\}^{-1} \{x^m(kT) - x_0^m\} \quad (8.16)$$

ここで, 初期値を x_0^m としたときの式 (8.12) の解軌道を $x^m(t) = x(t, x_0^m)$ と書いており, これは常微分方程式 (8.12) を数値解法によって解くことで求められる. さらに,

$$\frac{\partial x(t, x_0)}{\partial x_0} = \Phi(t, x_0) \quad (8.17)$$

と定義すると, 式 (8.16) は次のように書き換えられる.

$$\delta x_0^m = - \{ \Phi(kT, x_0^m) - I \}^{-1} \{x^m(kT) - x_0^m\} \quad (8.18)$$

さて, 式 (8.12) の両辺を x_0 で偏微分すると,

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, x_0) = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \frac{\partial x(t, x_0)}{\partial x_0} = A(x, t) \Phi(t, x_0) \quad (8.19)$$

ここで,

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = A(x, t) \quad (8.20)$$

と書いた. さらに, $x(0, x_0) = x_0$ に注意すると,

$$\Phi(0, x_0) = I \quad (8.21)$$

したがって, $\Phi(t, x_0)$ は初期値を単位行列の各列ベクトルとした線形常微分方程式

$$\frac{d\eta}{dt} = A(x, t)\eta \quad (8.22)$$

の解ベクトル $\eta(t)$ を横に並べた, いわゆる状態遷移行列である. これも数値計算によって容易に求めることができる.

以上より, 適当な初期値から出発し, 式 (8.18) によって m ステップ目の初期値を更新し, 更新量のノルムが十分小さくなるまでこれを繰り返すことによって kT 周期解の近似解を任意精度で求めることが可能である. また, 計算途中で得られる $\Phi(kT, x_0)$ は初期値の微小摂動を kT 周期後の解の摂動と関連づける行列であるから, kT 周

期解（の近似解）におけるこの行列の固有値を調べて、全ての固有値の絶対値が1未満であれば解は漸近安定、絶対値が1より大きな固有値が一つでもあれば解は不安定、と判別できる。

また、解くべき問題が、オートノマス系

$$\dot{x} = f(x) \quad (8.23)$$

の周期解（リミットサイクル）を求める問題の場合も、式(8.13)と同様に周期条件を、

$$x(T, x_0) = x_0 \quad (8.24)$$

とすればよいが、今度は周期 T も未知である。そこで、初期値 x_0 に関する拘束条件式

$$g(x_0) = 0 \quad (8.25)$$

を一つ追加し、式(8.24)と式(8.25)を満たす x_0, T をニュートン法によって求める。拘束条件式(8.25)は、解の位相に対する自由度を拘束するものであり、たとえば初期値ベクトル x_0 の一つの要素（初期変位や初期速度）をゼロに拘束するなどが考えられる。

以上の方針で、先ほどと同様に解の改良手順を構成する。初期値および周期の改良表現 $x_0 = x_0^m + \delta x_0^m, T = T^m + \delta T^m$ を周期条件式(8.24)および拘束条件式(8.25)に代入して、 δx_0^m および δT^m に関して1次近似すると、

$$x(T^m, x_0^m) + \left. \frac{\partial x(T, x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=x_0^m, T=T^m} \delta x_0^m + \left. \frac{\partial x(T, x_0)}{\partial T} \right|_{x_0=x_0^m, T=T^m} \delta T^m = x_0^m + \delta x_0^m \quad (8.26)$$

$$g(x_0^m) + \left. \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=x_0^m} \delta x_0^m = 0 \quad (8.27)$$

このうち、式(8.26)左辺第3項の $\frac{\partial x(T, x_0)}{\partial T}$ については、

$$x(T, x_0) = x_0 + \int_0^T f(x(\tau, x_0)) d\tau \quad (8.28)$$

と書けることに留意して、

$$\frac{\partial x(T, x_0)}{\partial T} = f(x(T, x_0)) \quad (8.29)$$

上式と式(8.17)より、式(8.26)は次のように書き換えられる。

$$\{\Phi(T^m, x_0^m) - I\} \delta x_0^m + f(x(T^m, x_0^m)) \delta T^m = -x(T^m, x_0^m) + x_0^m \quad (8.30)$$

これと式(8.27)をまとめると、

$$\begin{bmatrix} \Phi(T^m, x_0^m) - I & f(x(T^m, x_0^m)) \\ \left. \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=x_0^m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_0^m \\ \delta T^m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x(T^m, x_0^m) - x_0^m \\ g(x_0^m) \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

上式を解くことにより m ステップ目の初期値に対する修正量を求めることができる。

参考図書

- (1) 近藤孝広, 矢ヶ崎一幸, 非線形振動とカオスに関する二, 三の最近の話題, 日本機械学会論文集 (C編), 61巻, 583号, pp. 746-751, 2005.

第9章

自励振動（1）

振動的な外力が存在しないのにも関わらず振動が成長し持続する現象を**自励振動**という。自励振動は一言でいえば系の不安定現象であるが、これにモード間の連成や非線形現象が絡まって、一見するだけでは原因が分からない不可解な振動現象として現れることが多い。特に非線形性の影響は自励振動について述べるうえで欠かせないものであるが、ここではあまり深入りせず、自励振動の本質的な部分について述べる。

9.1 1自由度系の自励振動

9.1.1 摩擦による自励振動

日常よく経験する自励振動の一種に摩擦が原因となるものがある。例えば黒板にチョークを滑らせるときチョークが跳ねて破線状の線を描くときがあるが、これはその一例である。また、ブレーキの鳴きやワイパーのびびり振動も同じメカニズムの現象である。

図9.1のように、バネ k を介して壁に固定された質量 m の物体が一定速度 v_0 で移動するベルトの上に置かれているとする。物体とベルトの間には摩擦力が作用するが、これを物体とベルトとの相対速度 u の関数として $F(u)$ と書く。摩擦現象においては静止摩擦より動摩擦が小さいのが通常であり、 $F(u)$ は図9.2のような特性を持つ。すなわち相対速度が0のとき静止摩擦 F_0 が作用するが、相対速度の増加と共にいったん摩擦力は減少し、極小値をとったのち漸増する。

まずこの系の平衡状態を考える。明らかに、動摩擦力とバネの復元力が釣り合った状態が平衡状態であり、このときバネの伸びを x_0 とすると

$$kx_0 = F(v_0) \quad (9.1)$$

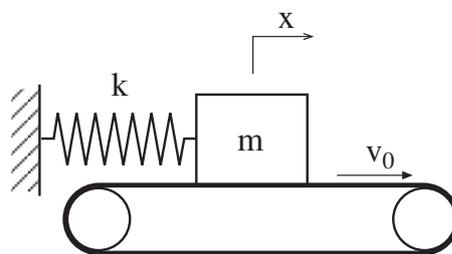


Fig. 9.1 摩擦力の作用するベルト上に置かれた1質点系

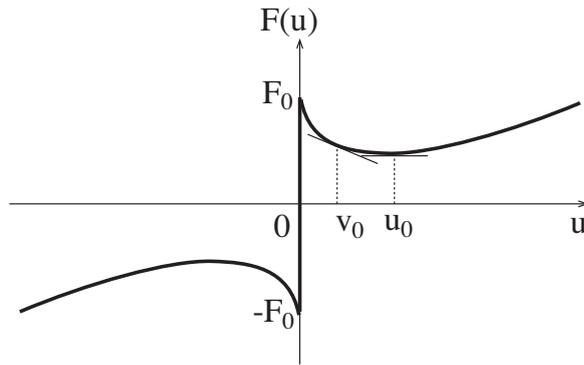


Fig. 9.2 乾性摩擦の速度特性

次に平衡状態にある系に擾乱を与えた場合を考える．平衡状態からの変位を x として運動方程式をたてると，

$$m\ddot{x} + k(x_0 + x) = F(v_0 - \dot{x}) \quad (9.2)$$

\dot{x} を微小として右辺を 1 次近似すると，

$$m\ddot{x} + k(x_0 + x) = F(v_0) - F'(v_0)\dot{x} \quad (9.3)$$

ただし $F'(u) = \frac{dF}{du}$ である．ここで平衡状態の式 (9.1) を考慮すると，

$$m\ddot{x} + F'(v_0)\dot{x} + kx = 0 \quad (9.4)$$

すなわちこの系の平衡点まわりの微小範囲における運動は，減衰係数 $c = F'(v_0)$ を持つ 1 自由度減衰振動系の自由振動となる．

減衰係数が正であれば通常の減衰自由振動系であり，系に加わった擾乱は時間と共に減衰する．すなわち系の振動エネルギーは減衰機構によって系外へ排出され時間と共に減少する．しかし図 9.2 から明らかなように， v_0 の値によっては減衰係数が負になる．この場合，ベルトの駆動力をエネルギー源としてベルトから物体にエネルギーが流入する状態となり，振動は減衰するのではなく逆に成長する．これが**自励振動**であり，不安定な系の発散による振動である．励振力は自分自身の運動から生み出されているため，物体が静止すれば励振力もなくなる．強制振動と異なり外部の振動的なエネルギー源が存在しないことに注意しよう．

9.1.2 線形化された系の極と自励振動

自励振動を起こす系の運動方程式を平衡点まわりで線形化近似すると，上述のような負性減衰を持つ系が得られる．そこで，負性減衰を持つ線形 1 自由度系の自由振動解を調べておこう．

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (9.5)$$

ただし $k \neq 0$ とする．ある関数 $x(t)$ を微分したものと元の $x(t)$ が定係数を介して等値されないといけないので，解は微分しても元の形を保つ唯一の関数，すなわち指数関数で表されることは明らかである．そこで解を ae^{st} と仮定すると，

$$(ms^2 + cs + k)ae^{st} = 0 \quad (9.6)$$

自明でない解が存在するための条件として特性方程式を得る．

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (9.7)$$

この場合、特性方程式は2次方程式なので極は二つであり、それらを s_1, s_2 とすると、自由振動の一般解は、

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} \quad (9.8)$$

となる。 a_1, a_2 は任意定数であり、初期条件を与えると確定することができる。

実際に特性方程式を解くと、極は、

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (9.9)$$

となる。表現を簡単にするために、

$$\omega_n = \sqrt{\frac{|k|}{m}} \quad (9.10)$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{m|k|}} \quad (9.11)$$

と定義すると、極は

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \frac{k}{|k|}} \right) \omega_n \quad (9.12)$$

ここで $\frac{k}{|k|}$ は $k > 0$ のとき 1 , $k < 0$ のとき -1 である。極を実部と虚部に分けて $s_1 = \sigma_1 + i\omega_1$, $s_2 = \sigma_2 + i\omega_2$ と表すと表 9.1 のようになる。表より、 $c < 0$ または $k < 0$ で極の実部 σ_1, σ_2 のどちらか一方が正となり、不安定となることがわかる。特に、 $k > 0$ で減衰比が $-1 < \zeta < 0$ の場合が**自励振動**の生じる領域である。 $\zeta \leq -1$ またはバネ定数が負の場合は振動せずに指数関数的に応答が発散する**ダイバージェンス型**の不安定系となる。

9.1.3 スティックスリップ

ところで、上の議論はあくまでも平衡点まわりで線形近似した系に対するものであり、運動方程式 (9.2) で表現される実際の摩擦振動系の応答はもっと複雑である。発生した自励振動は速やかに成長するが、その結果、平衡点まわりの速度振幅は線形化近似の成立する範囲を超えて増大する。たとえば \dot{x} が v_0 に達してベルトとの相対速度が 0 になると、それ以上速度が増加することはできなくなる。このとき物体はベルトと固着（スティック）し、バネを引き伸ばしながら正方向に運動することになる。バネの復元力が静止摩擦力を上回る点まで来ると物体は再び滑り出す（スリップ）。これを繰り返す振動を**スティックスリップ**という。バイオリンの弦が弓を引くことによつて鳴るのも、ワイングラスの縁を濡れた指でこすると音が鳴るのも同様の原理による。ドアのきしみ、ブレーキの鳴き、ワイパーのびびり振動など日常生活においても数多く見いだすことができる。

一般に自励振動系においては非線形性が重要な役割を果たしており、不安定平衡点近傍の挙動の解析には線形モデルでよいが、振動が成長して大振幅になると非線形モデルを使わなければならない。特に、スティックスリップの場合と同様に、非線形性のために振幅が飽和して一定振幅の定常振動が持続する**リミットサイクル**となることが多い。これについては第 10 章で扱う。

Table 9.1 パラメータの値と極の位置

	$\zeta > 1$	$\zeta = 1$	$0 < \zeta < 1$	$\zeta = 0$	$-1 < \zeta < 0$	$\zeta = -1$	$\zeta < -1$
$k > 0$	$\sigma_1, \sigma_2 < 0$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$	$\sigma_1 = \sigma_2 < 0$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$	$\sigma_1 = \sigma_2 < 0$ $\omega_1 = -\omega_2 > 0$	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ $\omega_1 = -\omega_2 > 0$	$\sigma_1 = \sigma_2 > 0$ $\omega_1 = -\omega_2 > 0$	$\sigma_1 = \sigma_2 > 0$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$	$\sigma_1, \sigma_2 > 0$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$
$k < 0$	$\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$						

9.1.4 失速フラッタとギャロッピング

一様な流速を持つ流体の中においた物体には流体力が作用するが、この流体力によっていろいろな振動が生じる。ここでは**失速フラッタ**と呼ばれるものについて簡単に述べよう。

いま、図 9.3 のように上下方向に弾性支持された物体（翼）からなる 1 自由度系が流速 U 中に置かれているとする。物体に作用する流体力のうち上下方向の運動に影響するのは抗力（流速方向の成分）と揚力（流速に直交する成分）であるが、これらの力を F_D, F_L とすると次式によって整理される。

$$F_D = \frac{1}{2}\rho\ell U^2 DC_D, \quad F_L = \frac{1}{2}\rho\ell U^2 DC_L \quad (9.13)$$

ここで ρ は流体の密度、 D は流れ方向の代表長さ、 ℓ は翼の長さであり、無次元量 C_D, C_L は、抗力係数、揚力係数と呼ばれている。抗力係数、揚力係数は迎え角 α の関数として実験や数値計算で求められるものであり、たとえば翼の場合の典型的な特性は図 9.4 のようになる。

まず平衡点を求める。迎え角 α_0 で揚力とバネの復元力が釣り合っているとすると、

$$ky_0 = F_L(\alpha_0) \quad (9.14)$$

次に平衡状態にある系に擾乱を与えた場合を考える。平衡状態からの変位を y とすると物体の運動によって見かけ上迎え角は $\Delta\alpha$ だけ変化する。変化の向きは、翼が上方に運動するとき迎え角が減少する方向である。このとき

$$\Delta\alpha = -\tan^{-1} \frac{\dot{y}}{U} \quad (9.15)$$

よってこのとき流体力の上下方向分力 F_y は

$$F_y(\alpha_0, \Delta\alpha) = F_L(\alpha_0 + \Delta\alpha) \cos \Delta\alpha + F_D(\alpha_0 + \Delta\alpha) \sin \Delta\alpha \quad (9.16)$$

したがって、運動方程式は

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k(y_0 + y) = F_y(\alpha_0, \Delta\alpha) \quad (9.17)$$

となる。

$\Delta\alpha$ を微小として右辺を 1 次近似すると、 $\alpha = -\frac{\dot{y}}{U}$ と書けることに注意して、

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k(y_0 + y) = F_L(\alpha_0) - \{F'_L(\alpha_0) + F_D(\alpha_0)\} \frac{\dot{y}}{U} \quad (9.18)$$

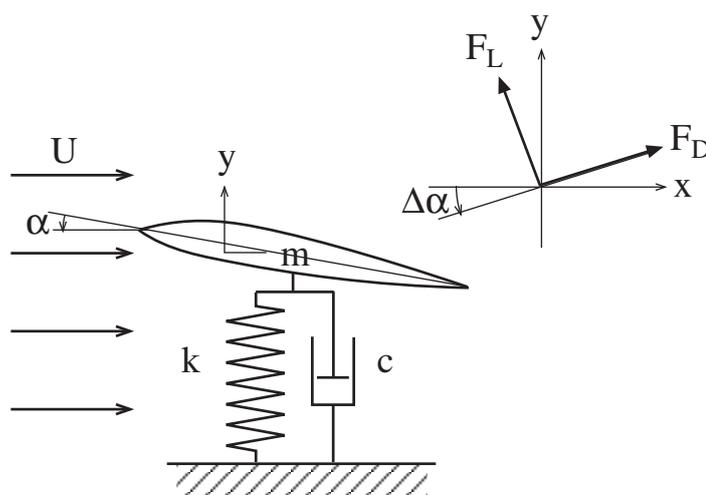


Fig. 9.3 一様流中に弾性支持された翼

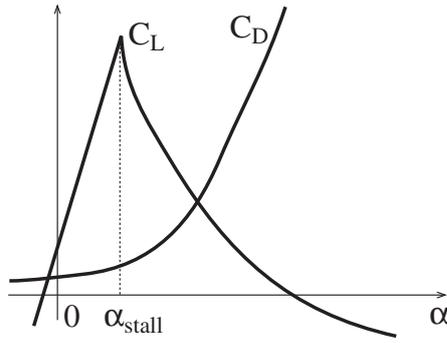


Fig. 9.4 $C_L(\alpha)$, $C_D(\alpha)$ の典型的な関数形

ただし $F'_L(\alpha) = \frac{dF_L}{d\alpha}$ である。ここで平衡状態の式 (9.14) を考慮すると、

$$m\ddot{y} + \left[c + \frac{1}{U} \{F'_L(\alpha_0) + F_D(\alpha_0)\} \right] \dot{y} + ky = 0 \quad (9.19)$$

すなわちこの系の平衡点まわりの運動方程式は、減衰係数

$$c_{total} = c + \frac{1}{U} \{F'_L(\alpha_0) + F_D(\alpha_0)\} = c + \frac{1}{2} \rho l U D \{C'_L(\alpha_0) + C_D(\alpha_0)\} \quad (9.20)$$

を持つ 1 自由度減衰振動系の自由振動の運動方程式と一致する。

上式の $\{ \}$ 内に負号を付けたものを A_1 とおくと、図 9.4 から推察されるように、 A_1 は失速角 α_{stall} を越えた付近で正の値を持つ場合がある。このような場合に流速 U がある値以上になったとき、係数 c_{total} の値は負となり自励振動が発生する。 c_{total} が負となる条件から、自励振動が発生する臨界流速は

$$U_c = \zeta \frac{\omega_n D}{n A_1} \quad (9.21)$$

と整理することができる。ここで $n = \rho l D^2 / (4m)$ は質量パラメータ、 ω_n は系の固有振動数、 ζ は減衰比である。 A_1 値は翼の断面形状と迎え角によって決まり、これが正のとき臨界流速より大きな流速で自励振動が発生する。 A_1 値が負の場合、自励振動は発生しない。

このような自励振動は吊り橋の橋桁、ロータブレードなどで発現するもので、**失速フラッタ**と呼ばれる。冬季の風雨時に水滴や氷滴の付着したケーブルや送電線においても同様の現象が現れることがあり、ときに大振幅の振動を引き起こして停電の原因となる。この現象は特に**ギャロッピング**と呼ばれている。

9.2 多自由度系の自励振動

これまでは自励振動の生じる原因を、負性減衰を持つ系の不安定振動として説明してきたが、2 自由度以上の系では、負の減衰要素がない場合でも、自由度間の連成の状況によって系が不安定になって自励振動が生じる場合がある。ここでは 2 自由度系で説明する。

9.2.1 復元力に連成がある 2 自由度非減衰系の場合

簡単のため減衰はないとし、二つの自由度が復元力のみを通じて連成している場合を考える。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & k_{12} \\ k_{21} & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.22)$$

特性方程式を求めると

$$s^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)s^2 + \omega_1^2\omega_2^2 - k_{12}k_{21} = 0 \quad (9.23)$$

s^2 について解くと

$$s^2 = \frac{-(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k_{12}k_{21}}}{2} \quad (9.24)$$

いま、二つの自由度に連成がないとした場合の固有振動数 ω_1, ω_2 がほぼ等しいとする。

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + \varepsilon \quad (9.25)$$

すると、式 (9.24) は、

$$s^2 = \frac{-2\omega_1^2 - \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4k_{12}k_{21}}}{2} = -\omega_1^2 \pm \sqrt{k_{12}k_{21}} + O(\varepsilon) \quad (9.26)$$

上式の二つの s^2 は、すべて負の実数の場合、片方が正で片方が負の場合、共役複素数のいずれかになる。 s^2 がいずれも負の実数の場合、極 s は二対の共役な純虚数であり、二種類の単振動モードを持つ。 s^2 が正負の実数の場合、極 s は一対の純虚数と一対の正負実数となり、正の実数極に対応するモードがダイバージェンス型の不安定モードになる。 s^2 が共役複素数の場合、極 s は二対の共役複素数となるが、二組のうち一方が必ず右半面に入り、これに対応するモードは自励振動モードになる。以上を考慮すると、この系の振る舞いは次のようにまとめられる：

- $0 \leq k_{12}k_{21} < \omega^4$ のとき安定な非減衰振動系；
- $k_{12}k_{21} > \omega^4$ のときダイバージェンス型の不安定系；
- $k_{12}k_{21} < 0$ のとき自励振動系。

通常の線形振動系においては剛性行列は対称であり、したがって剛性行列の非対角要素が異符号になることはないが、非線形系を平衡点まわりで線形化した運動方程式においては、剛性行列の非対角要素が異符号になる場合があり得る。このような場合には、たとえ系が見かけ上減衰要素を持たない場合でも、発散的な自励振動モードが出現する。

このような多自由度系や高次振動系で説明できる自励振動現象の例として、滑り軸受における**ドライホイップ**や**オイルホイップ**、翼の**連成フラッタ**、車輪の**シミ**などがある。

9.2.2 系の安定判別

上述のように自励振動とは系の不安定現象の一種である。したがって、ある系が自励振動を起こし得るかどうかが調べるためには、その系の平衡点における安定性を判別してやればよい。

一般に振動系は非線形性を持っており、特に自励振動系では非線形性が重要な役割を果たすことが多い。しかし平衡点の安定性だけに興味がある場合は平衡点まわりの微小振動を調べれば十分である。ここでは自由度 N の多自由度系を考え、平衡点まわりの線形化によって次のような運動方程式が得られたものとする。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (9.27)$$

これに対して以下の手順で自由振動の一般解を求めることができる。

1. 解を $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}e^{st}$ と仮定して運動方程式に代入。
2. 特性方程式 $|\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}| = 0$ から極を求める。
3. それぞれの極について $(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})\mathbf{X} = \mathbf{0}$ を解いて応答の振幅比を求める。
4. 得られた解を重ね合わせて一般解を得る。

その結果、一般解は、 $n = 2N$ として

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^n a_r \phi_r e^{s_r t} \quad (9.28)$$

の形となり，極 s_r の実部の符号で安定性が決定される．すなわち n 個の極のうち実部が正であるものが一つでも存在すれば系は不安定である．

極は特性方程式 $|\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}| = 0$ から求められる．これを展開した n 次代数方程式を

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (9.29)$$

とおくと，安定性の判別問題はこの代数方程式の解の性質を調べることに帰着する．

しかし，特別な場合を除いて5次以上の高次の代数方程式を解析的に解く方法は存在しない，これに対して，方程式を解かずに極の安定性を判別する方法がいくつか知られている．まず，

- 特性方程式 (9.29) において，全ての極が漸近安定であるための必要条件は，係数 a_0, a_1, \dots, a_n が全て同符号かつ非零であることである．

したがって，これが満たされないとき，ただちに系は不安定であることがわかる．全ての極が漸近安定であるための必要十分条件としては，**ラウスの判別条件**や**フルビッツの判別条件**が知られている．ここではフルビッツの判別条件を示す．

- 特性方程式 (9.29) において，全ての極が漸近安定であるための必要十分条件は，次のフルビッツ行列の主座小行列式が全て正であることである．

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

ただし a の添字が n 以上または負になる係数は 0 と置くものとする．

第10章

自励振動 (2)

10.1 リミットサイクル

10.1.1 定性的な性質

第9章で述べたように、負の減衰のために自励振動が発生すると、振幅が指数関数的に増大する。しかし多くの場合、振幅が大きくなると系に何らかの非線形性が現れる。現れた非線形性が正の減衰効果を持つ場合、自励振動は成長をやめ定常振動に収束する。位相平面上で見ると、これは一つの閉軌道への収束であり、この閉軌道を**リミットサイクル**という。

たとえば、レイリー (Rayleigh) の式

$$\ddot{x} - \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{1}{3} \dot{x}^3 \right) + \omega_0^2 x = 0 \quad (10.1)$$

で支配される系の応答をいろいろな ε について数値積分で求めると、図 10.1 のようになる。ただし、 $\omega_0 = 1$ とし、図の左側は初期値を $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0.1$ とした場合の $x(t), \dot{x}(t)$ を、右側は二種類の初期値 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0.1$ および $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 4$ から出発した場合の軌道を描いたものである。図 10.1(a) において顕著であるが、応答は最初指数的に振幅が増大した後、一定値に収束している。これは式 (10.1) から明らかのように、 \dot{x} が小さいとき左辺の非線形項は $-\varepsilon \left(1 - \frac{1}{3} \dot{x}^2\right) \dot{x} \approx -\varepsilon \dot{x}$ となり負の減衰として働くが、振動が成長して \dot{x} が大きくなると \dot{x}^2 の項が効いて正の減衰として働くからである。相平面の図からは、初期値にかかわらず一つの閉曲線すなわちリミットサイクルに収束している様子が見て取れる。

弱非線形、すなわち ε が小さいときリミットサイクルは円形に近く、応答はほぼ正弦波に近い波形となる。 ε を大きくするとリミットサイクルは長方形に近くなり、応答は x において三角波、 \dot{x} において方形波に近い形となる。このように、非線形性の強い自励振動系において、ある状態量の値が急激に (不連続的に) 変化する振動様式を**弛緩振動 (relaxation oscillation)** という。

同様なリミットサイクルおよび弛緩振動は、ファンデルポール (van der Pol) の式

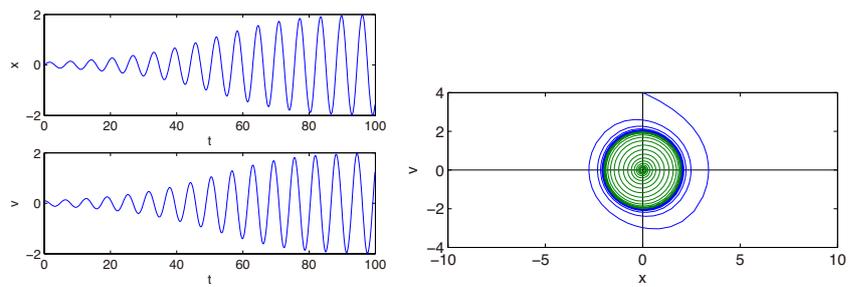
$$\ddot{x} - \varepsilon (1 - x^2) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (10.2)$$

においても認められる。たとえば、 $\omega_0 = 1$ 、初期値を $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 4$ とした場合の解軌道を数値積分によって求めると図 10.2 のようになる。

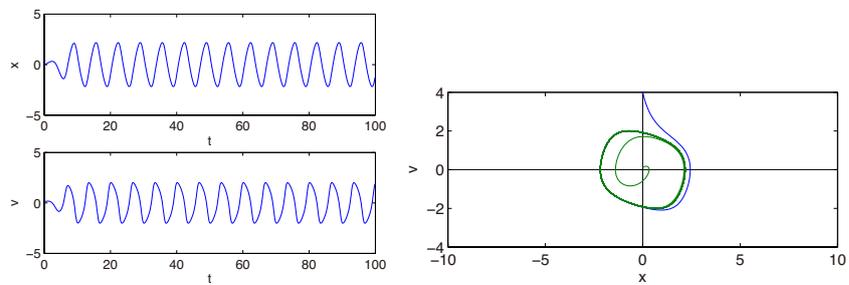
10.1.2 弱非線形系の近似解

ファンデルポールの式 (10.2) において ε が微小であるとして、平均法によって定常解を求めてみよう。まず $\varepsilon = 0$ とおいた式の一般解

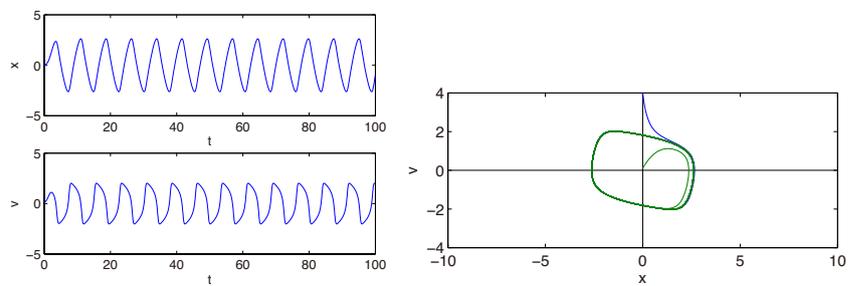
$$x = a \cos \theta, \quad \dot{x} = -a\omega_0 \sin \theta, \quad \theta = \omega_0 t + \varphi \quad (10.3)$$



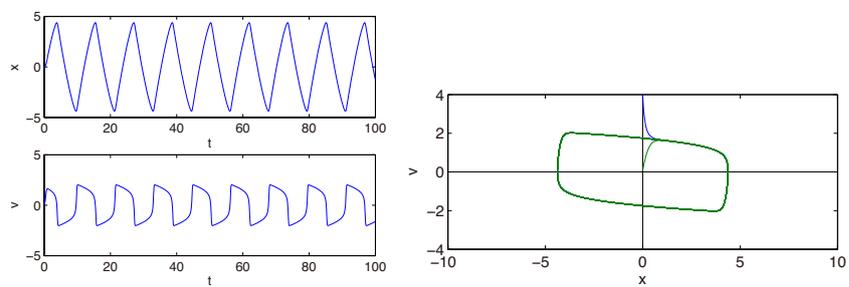
(a) $\varepsilon = 0.1$



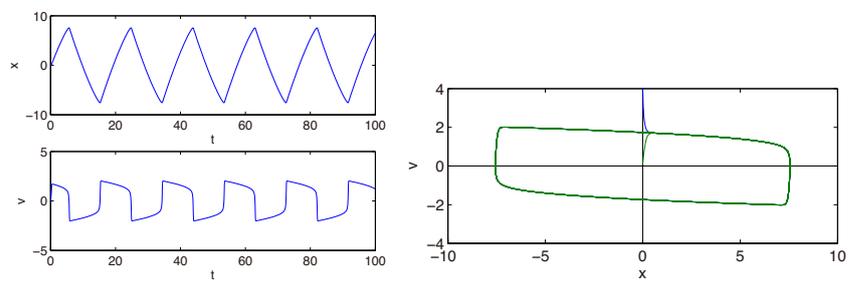
(b) $\varepsilon = 1$



(c) $\varepsilon = 2$



(d) $\varepsilon = 5$



(e) $\varepsilon = 10$

Fig. 10.1 レイリー方程式の初期値応答 (左: 応答波形, 右: 相平面における軌道)

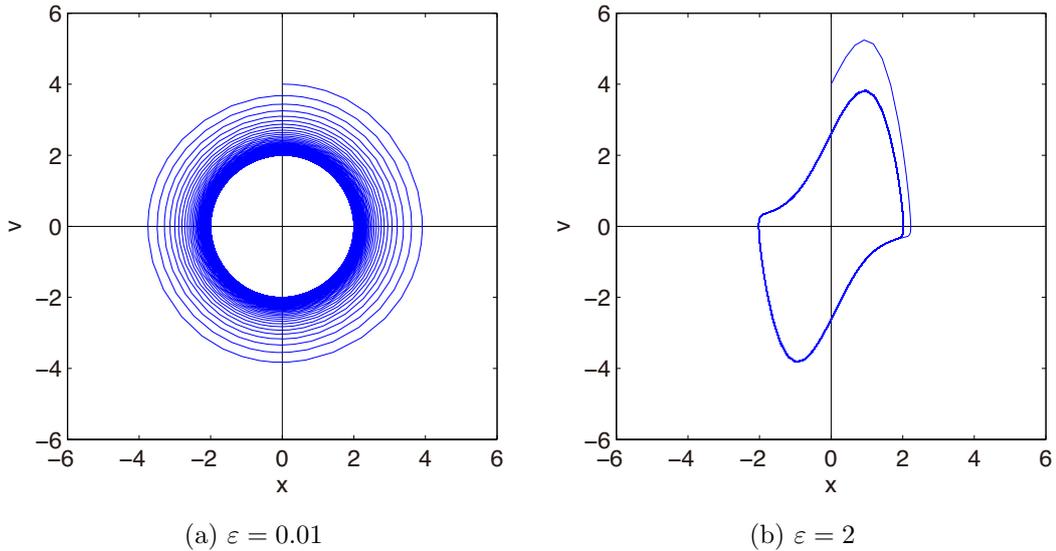


Fig. 10.2 ファンデルポールの式の解軌道

を母解として定数変化法を適用すると,

$$\dot{a} = \varepsilon a (1 - a^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta \quad (10.4)$$

$$\dot{\varphi} = \varepsilon (1 - a^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \quad (10.5)$$

平均法の近似を行うと,

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \quad (10.6)$$

$$\dot{\varphi} = 0 \quad (10.7)$$

を得る. 初期条件を $a(0) = a_0, \varphi(0) = \varphi_0$ として上式を解くと, 次式を得る.

$$a = \frac{a_0 e^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0^2}{4}\right) (e^{\varepsilon t} - 1)}} \quad (10.8)$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad (10.9)$$

したがって, 解は,

$$x = \frac{a_0 e^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0^2}{4}\right) (e^{\varepsilon t} - 1)}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (10.10)$$

となる. ここで $a_0 \neq 0$ として $t \rightarrow \infty$ とすると, $a \rightarrow 2$ であるから, 定常状態での解は,

$$x = 2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (10.11)$$

となり, 初期条件に依存せず一定振幅の振動に収束することがわかる. 定常状態での振幅は式 (10.6) において $\dot{a} = 0$ としても求められる. なお $a_0 = 0$ も定常解となるが, これは式 (10.6) の不安定平衡点である. したがって, たとえ初期振幅がゼロであっても, わずかな擾乱によって振動が成長し, 式 (10.11) の定常解に至る.

10.1.3 弛緩振動の近似解 (図式解法)

これまでも述べたように, 平均法が使えるのは ε が微小な弱非線形系の場合だけであり, それ以外は位相面上の図式解法か数値計算によらなければならない. しかし ε が極端に大きい場合には, 次のような近似で解の見通しを立てることができる.

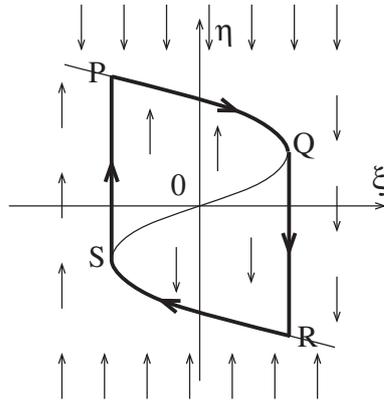


Fig. 10.3 レイリーの弛緩振動

例としてレイリーの式を取りあげる。レイリーの式

$$\ddot{x} - \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{1}{3} \dot{x}^3 \right) + x = 0 \quad (10.12)$$

において、 ε が十分大きな数と仮定して、 $x = \varepsilon \xi$, $\dot{x} = \eta$ と変数変換する、すなわち相平面において x 軸を ε でスケール変換する。

$$\dot{\xi} = \frac{\eta}{\varepsilon} \quad (10.13)$$

$$\dot{\eta} = \varepsilon \left\{ \left(\eta - \frac{1}{3} \eta^3 \right) - \xi \right\} \quad (10.14)$$

これより位相平面 (ξ - η 平面) 上のトラジェクトリの傾きを表す式として

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varepsilon^2 \frac{\eta - \frac{1}{3} \eta^3 - \xi}{\eta} \quad (10.15)$$

を得る。そこで図 10.3 のように ξ - η 平面上に $\xi = \eta - \frac{1}{3} \eta^3$ なる曲線を描くと、この曲線上でトラジェクトリの傾きはゼロである。しかしそれ以外の点では、 ε が十分大きな数であるから、曲線のごく近傍を除いてトラジェクトリの傾き $\frac{d\eta}{d\xi}$ は非常に大きいことがわかる。また式 (10.13) より、 $\dot{\xi}$ は上半面では正、下半面では負であり、さらに式 (10.14) より、 $\dot{\eta}$ の符号は、 $\xi > \eta - \frac{1}{3} \eta^3$ で負、 $\xi < \eta - \frac{1}{3} \eta^3$ で正であるので、相平面上の各点において状態 (ξ, η) は図 10.3 の矢印の向きに移動することになる。こうして結局、図に示すようなリミットサイクル (PQRS) が得られる。

リミットサイクル PQRS において、経路 PQ, 経路 RS にかかる時間に比べて経路 QR, 経路 SP にかかる時間は十分短い。なぜなら、トラジェクトリ上の 2 点 AB を通過するのにかかる時間は、

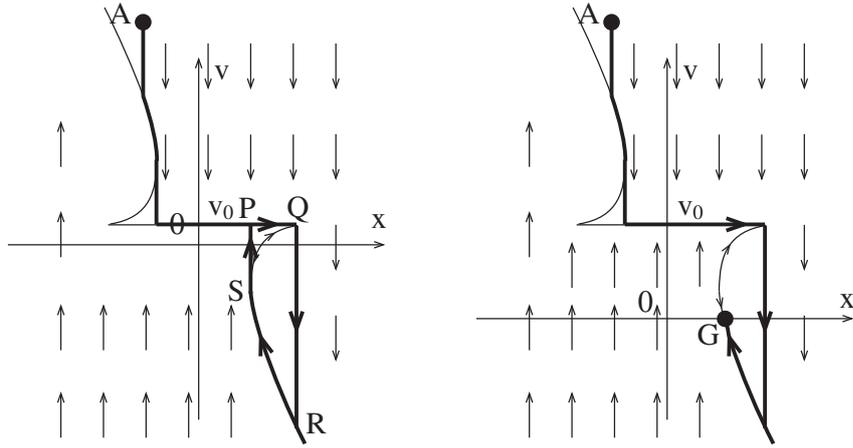
$$T_{AB} = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{d\xi}{\dot{\xi}} = \int_A^B \frac{d\eta}{\dot{\eta}} \quad (10.16)$$

と書けるから、経路 PQ, 経路 RS を通過するのに要する時間は、式 (10.16), 式 (10.13) を用いて、

$$T_{PQ} = T_{RS} = \int_P^Q \frac{d\xi}{\dot{\xi}} = \varepsilon \int_P^Q \frac{d\xi}{\eta} \sim \varepsilon \quad (10.17)$$

とオーダー評価できる。同様に、経路 QR, 経路 SP に要する時間は、式 (10.16), 式 (10.14) より、

$$T_{QR} = T_{SP} = \int_Q^R \frac{d\eta}{\dot{\eta}} \sim \varepsilon^{-1} \quad (10.18)$$



(a) スティックスリップが生じる場合 (b) スティックスリップが生じない場合

Fig. 10.4 スティックスリップによる弛緩振動

とオーダー評価できる。よって、

$$\frac{T_{PQ}}{T_{QR}} = \frac{T_{RS}}{T_{SP}} \sim \varepsilon^2 \quad (10.19)$$

であり、経路 PQ, 経路 RS にかかる時間に比べて経路 QR, 経路 SP にかかる時間は十分短い、すなわち弛緩振動になっていることがわかる。なお、経路 PQ, 経路 RS においては $\xi = \eta - \frac{1}{3}\eta^3$ が成り立つことより、

$$T_{PQ} = T_{RS} = \int_P^Q \varepsilon \frac{1-\eta^2}{\eta} d\eta = \varepsilon \left(\ln \eta - \frac{\eta^2}{2} \right) \Big|_2^1 = \varepsilon \left(\frac{3}{2} - \ln 2 \right) = 0.807\varepsilon \quad (10.20)$$

であり、1周期の時間は、

$$T = 2T_{PQ} = 1.614\varepsilon \quad (10.21)$$

と計算できる。

同様の議論は、一般に非線形項が $\varepsilon f(x)$, $\varepsilon \gg 1$ の形の場合に有効である。そこでもう一つの例として、第9章で扱った摩擦による自励振動を取り上げよう。運動方程式は

$$m\ddot{x} + kx = F(v_0 - \dot{x}) \quad (10.22)$$

$\dot{x} = v$ とおくと、

$$\dot{x} = v \quad (10.23)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m} \{F(v_0 - v) - kv\} \quad (10.24)$$

ここで m が十分小さいとすると、トラジェクトリの傾き

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{m} \frac{F(v_0 - v) - kv}{v} \quad (10.25)$$

は曲線 $x = \frac{1}{k}F(v_0 - v)$ 上でゼロ、曲線から離れた点で非常に大きい。また \dot{v} の符号は、 $x > \frac{1}{k}F(v_0 - v)$ で負、 $x < \frac{1}{k}F(v_0 - v)$ で正である。以上のことより、位相平面の任意の点を出発するトラジェクトリを描くと、いかなる点から出発しても最終的には図 10.4 のようなリミットサイクル PQRS に収束することがわかる。これが第9章で述べた**スティックスリップ**である。また、曲線 $x = \frac{1}{k}F(v_0 - v)$ と x 軸との交点は特異点であるが、この場合は不安定特異点である。

ただし、 v_0 が大きくなると、位相平面における切り替え曲線は図??のようになり、リミットサイクルは発生しなくなる。曲線 $x = \frac{1}{k}F(v_0 - v)$ と x 軸との交点 G は安定特異点となり、トラジェクトリは最終的に G に収束する。リミットサイクルの発生条件は、

$$v_0 < u_m \quad (10.26)$$

ここで u_m は $F(u)$ の極小点を与える相対速度 u である。

10.2 引き込み現象

自励的な非線形振動をする振動体が、振動的な外的因子の影響を受けるとき、本来の振動数を離れて外的因子の振動数で振動する現象を**引き込み**または**同期**という。引き込み現象は、自励振動子を強制加振した場合や、自励振動子を他の振動系と相互作用させた場合、複数の自励振動子を相互作用させた場合に生じる。

10.2.1 簡易モデルによる強制引き込みの説明

リミットサイクルを持つ自励振動系（固有振動数を ω_0 とする）を調和外力で強制加振するとしよう。外力振幅が比較的小さく、 ω と ω_0 が大きく離れているときの系の応答は、強制外力の振動数 ω を持つ成分と自励振動成分（振動数 ω_0 ）からなり、応答はうなりを生じる（概周期振動）。加振振動数 ω を ω_0 に徐々に近づけていくと、 $|\omega - \omega_0|$ がある値以下になったとたん、うなりがやみ、応答は強制外力と同じ振動数を持つ振動に変化する。これを自励振動系の**強制引き込み**という。

ここでは、強制引き込みが起きる原理を直観的に理解するため、自励振動系の簡易的なモデルを使って説明を行う。ここでの説明はかなり荒っぽく、厳密さを欠いた話であるが、思い切った考察によって問題の本質が見えるという面もある。なお具体的な自励振動系についての定量的な議論は次節で行う。

まず、リミットサイクルを持つ自励振動系の簡易モデルを導入する。前節で述べたように、自励振動系のリミットサイクルは、減衰項の振幅依存性によって生じる。そこで、これを強調して、次のモデルを考える。

$$\ddot{x} - \varepsilon\{c - \delta(\alpha)\}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (10.27)$$

ここで c は正の定数、 α は応答の振幅を表す代表値、 $\delta(\alpha)$ は $\delta(0) = 0$, $\delta(\alpha_0) = c$ なる単調増加関数である。つまり、この系の減衰係数は振幅が小さい場合は負であるが、振幅の増加につれて増大し、 $\alpha = \alpha_0$ を超えると正に転じる。

上式の解を $x = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$ として平均法で解くと、平均化方程式は、

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon a}{2} \{c - \delta(\alpha)\} \quad (10.28)$$

$$\dot{\varphi} = 0 \quad (10.29)$$

定常振幅 a_0 は、第 1 式の平衡点をとって $a_0 = 0$ または $a_0 = \alpha_0$ 。安定判別のために、 $a = a_0 + \Delta a$ とおいて式 (10.28) を線形化すると、

$$\Delta \dot{a} = \frac{\varepsilon}{2} \{c - \delta(\alpha) - a\delta'(\alpha)\} \Delta a \quad (10.30)$$

これより、 $a_0 = 0$ は不安定である。また、 $a_0 = \alpha_0$ のとき、

$$\Delta \dot{a} = -\frac{\varepsilon \alpha_0}{2} \delta'(\alpha_0) \Delta a \quad (10.31)$$

であり、 $\delta'(\alpha) > 0$ を考慮すると、この平衡点は安定であることがわかる。以上より、この系は確かに

$$x = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (10.32)$$

なるリミットサイクルを持つ。

次にこの系に調和加振力を作用させた次のモデルを考える.

$$\ddot{x} - \varepsilon\{c - \delta(\alpha)\}\dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos \omega t \quad (10.33)$$

まずは定性的な考察から始めよう. この系の非線形性は弱く弱非線形であるので, 線形系の場合と同じように, 定常解を外力による強制振動成分 (振動数 ω) と自由振動成分 (振動数 ω_0) に分けて考えると, 次のことが予想される.

1. 外力による強制振動成分の振幅が α_0 に満たない場合

このとき

$$-\{c - \delta(\alpha)\} < 0 \quad (10.34)$$

であり, 負減衰となるため自励振動が発生する. 振動応答は自励振動成分と強制振動成分との**結合振動**になり, うなりを生じる.

2. 外力による強制振動成分の振幅がちょうど α_0 になる場合

このとき

$$-\{c - \delta(\alpha)\} = 0 \quad (10.35)$$

であり, 減衰は零である. したがって自励振動は発生しない.

3. 外力による強制振動成分の振幅が α_0 を上回る場合

このとき

$$-\{c - \delta(\alpha)\} > 0 \quad (10.36)$$

であり, 正減衰となるため, 自励振動は発生しない.

上の考察において2番目と3番目のケースが強制引き込みが生じた状態である. つまり, 強制引き込みは, 減衰が振幅依存性を持ち, 振幅の大小によって安定性が切り替わるために生じる現象であると解釈できる.

式 (10.33) の解析をもう少し進めてみよう. まず結合振動が発生する場合を想定して, 解を

$$x = x_0 + y, \quad x_0 = a \cos \theta_0, \quad a = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \theta_0 = \omega t \quad (10.37)$$

とおく. 上式の x_0 は強制外力に同調した応答成分, y はそれ以外の振動成分である. なお ω と ω_0 は十分離れているとする. これを式 (10.33) に代入すると,

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y - \varepsilon\{c - \delta(\alpha)\}(-a\omega \sin \theta_0 + \dot{y}) = 0 \quad (10.38)$$

上式の解を, $y = b \cos \theta$, $\theta = \Omega t + \varphi$ とおいて定数変化法を適用すると,

$$\dot{b} = \frac{b}{\Omega}(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \theta \sin \theta + \frac{\varepsilon}{\Omega}\{c - \delta(\alpha)\}(a\omega \sin \theta_0 \sin \theta + b\Omega \sin^2 \theta) \quad (10.39)$$

$$b\dot{\varphi} = \frac{b}{\Omega}(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos^2 \theta + \frac{\varepsilon}{\Omega}\{c - \delta(\alpha)\}(a\omega \sin \theta_0 \cos \theta + b\Omega \sin \theta \cos \theta) \quad (10.40)$$

式 (10.39), 式 (10.40) の右辺は θ_0 および θ についてそれぞれ周期 2π を持つ周期関数である. そこで右辺の2重フーリエ級数展開の定数項をとって平均化すると,

$$\dot{b} = \frac{\varepsilon b}{2}\{c - \delta(\alpha)\} \quad (10.41)$$

$$b\dot{\varphi} = \frac{b}{2\Omega}(\omega_0^2 - \Omega^2) \quad (10.42)$$

これが、式 (10.39), 式 (10.40) に対する平均化方程式である。ここで、振幅を表す代表値 α は b の関数であることに注意せよ。定常状態では次式が成立する。

$$b_0\{c - \delta(\alpha(b_0))\} = 0 \quad (10.43)$$

$$b_0(\omega_0^2 - \Omega^2) = 0 \quad (10.44)$$

ここで b_0 は定常解の振幅である。 b_0 の安定条件は、式 (10.41) を平衡点 b_0 周りで線形化した式より、

$$p = \{c - \delta(\alpha(b_0))\} - b_0 \delta'(\alpha(b_0)) \left. \frac{\partial \alpha}{\partial b} \right|_{b=b_0} < 0 \quad (10.45)$$

と求まる。ただし、 δ' は δ の導関数である。

振幅を表す代表値 α は $|a|$ および b_0 に関する単調増加関数であり、これ以降の解析においては、解析を簡単にするために $\alpha = |a| + b_0$ と設定する。(一般に振幅依存の減衰係数が $|a| + b_0$ の関数になるという意味ではなく、「そのような減衰機構を解析対象にする」という意味である。)

式 (10.43), 式 (10.44) の解は次の二通り。

1. $b_0 \neq 0$ (結合振動解)

式 (10.43) より $c = \delta(\alpha) = \delta(|a| + b_0)$ すなわち $|a| + b_0 = \alpha_0$ 。また、式 (10.44) より $\Omega = \omega_0$ 。すなわち、強制振動成分の他に自励振動が発生することがわかる。安定条件は、式 (10.45) より、

$$p = -b_0 \delta'(|a| + b_0) < 0 \quad (10.46)$$

であり、 $b_0 > 0$ ならば安定である。 $|a| + b_0 = \alpha_0$ より、 $b_0 > 0$ であるためには $|a| < \alpha_0$ でなければならない。以上をまとめると、この系は $|a| < \alpha_0$ において安定な自励振動解を持ち、応答は結合振動となる。

2. $b_0 = 0$ (引き込み解)

$p = \{c - \delta(|a|)\}$ 、よって式 (10.45) より、 $c < \delta(|a|)$ すなわち $|a| > \alpha_0$ のとき解 $b_0 = 0$ は安定。応答は強制振動成分のみであり、引き込みが生じた状態である。

以上より、引き込みの発生条件は $|a| > \alpha_0$ であることがわかる。

$$|a| = \frac{F}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \quad (10.47)$$

であることを考慮すると、引き込みは共振点近傍で生じること、外力の振幅が大きいほど、引き込みの生じる周波数域が拡大することがわかる。つまり、加振振動数を一定にして外力振幅を大きくすることによっても引き込みは生じる。

次に、加振振動数が固有振動数に近づき、引き込み領域に入った場合の応答について考察してみよう。これはこの系の主共振点付近の応答であるから、式 (10.33) を

$$\ddot{x} - \varepsilon\{c - \delta(a)\}\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon F \cos \omega t \quad (10.48)$$

と書き換えて、解を $x = a \cos \theta$, $\theta = \omega t + \varphi$ とおく。以下の流れは基本的に第 6 章と同様であり、平均法によって次の平均化方程式を得る。

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon a}{2}\{c - \delta(a)\} - \frac{\varepsilon}{2\omega} F \sin \varphi \quad (10.49)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2\omega}(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{\varepsilon}{2a\omega} F \cos \varphi \quad (10.50)$$

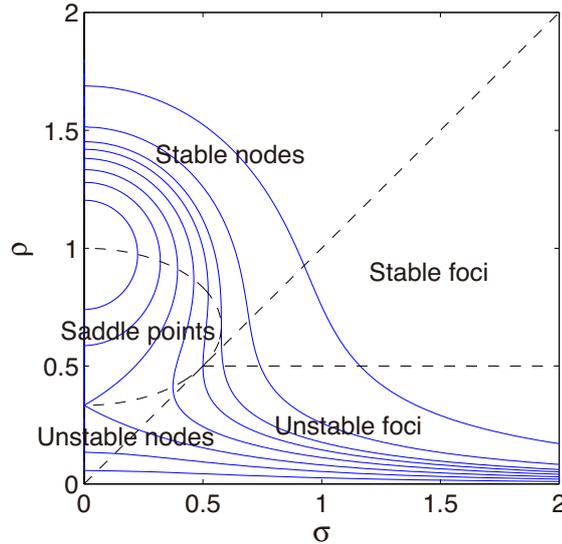


Fig. 10.5 ファンデルポール振動系の共振点における強制引き込み解とその安定性 (内側から $E = 0.05, 0.1, 4/27, 0.2, 0.25, 8/27, 0.4, 0.8$)

これより，引き込み領域における共振曲線の振幅の式として，

$$a_0 = \frac{\varepsilon F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon^2 \{c - \delta(a_0)\}^2 \omega^2}} \quad (10.51)$$

が得られる．ただし上式は右辺に a_0 を含んでおり，陽な表現ではないことに注意されたい．しかしこの式から共振曲線のおおよその形状を推測することはできる．この系は振幅依存の減衰係数 $\{c - \delta(a_0)\}$ を持っており，その値は引き込み領域 $a > a_0$ において正であり振幅に関する単調増加関数である．したがって，共振曲線は $\omega = \omega_0$ においてピークを持つが，ピークの形状は振幅が大きくなるほど鈍くなるので（振幅が大きくなるほど減衰が大きくなることによる），共振曲線は頂上が丸められた山形あるいは途中にくびれを有する形状になると予想される．

10.2.2 ファンデルポール振動系の強制引き込み解

ここでは具体的な自励振動系の例としてファンデルポール振動系の主共振点における強制引き込み解を求めてみよう．解析の方法は第6章または式(10.48)～式(10.51)と同様である．

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon F \cos \omega t \quad (10.52)$$

解を $x = a \cos \theta, \theta = \omega t + \varphi$ とおき，平均法によって次の平均化方程式を得る．

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{\varepsilon}{2\omega} F \sin \varphi \quad (10.53)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2\omega} (\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{\varepsilon}{2a\omega} F \cos \varphi \quad (10.54)$$

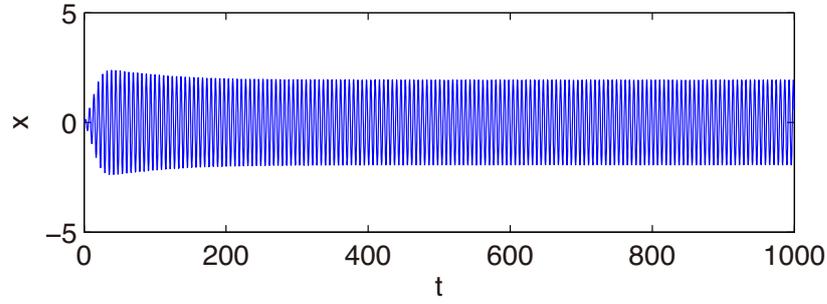
右辺を零とする a, φ が定常状態における解の振幅と位相である．これらを a_0, φ_0 とすると，

$$\frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{\varepsilon}{2\omega} F \sin \varphi \quad (10.55)$$

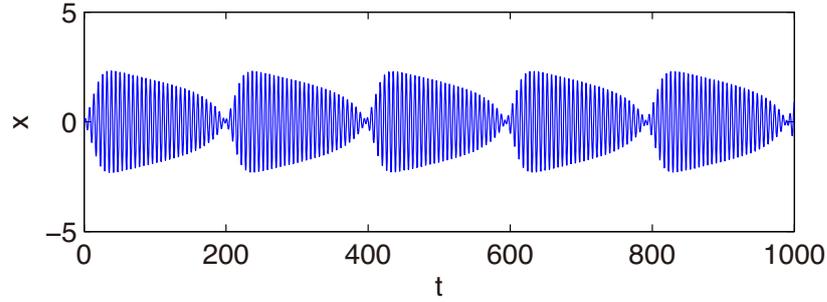
$$\frac{1}{2\omega} (\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{\varepsilon}{2a\omega} F \cos \varphi \quad (10.56)$$

したがって，引き込み領域における共振曲線の振幅の式として，

$$\varepsilon^2 \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{a_0^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}\right)^2 \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 = \varepsilon^2 \left(\frac{F}{2\omega}\right)^2 \quad (10.57)$$



(a) 引き込み振動 ($\omega = 1.035$)



(b) 結合振動 ($\omega = 1.045$)

Fig. 10.6 ファンデルポール振動系の強制振動応答 ($\varepsilon = 0.1, \omega_0 = 1, F = 1.4, x(0) = \dot{x}(0) = 0$)

または

$$\rho(1 - \rho)^2 + \rho\sigma^2 = E \quad (10.58)$$

を得る. ここで, $\sigma = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\varepsilon\omega}$ (離調パラメータ), $\rho = (\frac{a_0}{2})^2$, $E = (\frac{F}{2\omega})^2$ とおいた. 横軸を σ (共振振動数からの偏差), 縦軸を ρ (振幅の2乗) とし, E (外力振幅の2乗) をパラメータとして式 (10.58) を表すと図 10.5 のようになる. なお, 式 (10.58) より共振曲線は $\sigma = 0$ について対称であるので, $\sigma \geq 0$ の側のみ示している. 前節で予想したように, 減衰の振幅依存性から, 共振曲線は頂上丸められた山形になっている.

次に今求めた定常解の安定性を調べる. $a = a_0 + \Delta a$, $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ を式 (10.53), 式 (10.54) に代入して平衡点回りで線形化し, 式 (10.55), 式 (10.56) を使うと,

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{a} \\ \Delta\dot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon}{2} \begin{bmatrix} 1 - 3\rho & -a_0\sigma \\ \frac{\sigma}{a_0} & 1 - \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} \quad (10.59)$$

これにより, 安定条件は,

$$P = 2 - 4\rho < 0 \quad \text{すなわち} \quad \rho > \frac{1}{2} \quad (10.60)$$

$$Q = (1 - 3\rho)(1 - \rho) + \sigma^2 > 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\sigma^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} + \frac{(\rho - \frac{2}{3})^2}{(\frac{1}{3})^2} > 1 \quad (10.61)$$

これらの条件で表される安定領域を図示すると, 図 10.5 中に破線で示した水平な直線と楕円の上側となる. さらに図 10.5 には, 平衡点 (特異点) の種類を 4.3 節にしたがって分類した結果を記入してある.

図 10.5 より, 安定な定常解が存在するのは σ の絶対値がある値より小さい領域であることがわかる, これが引き込み領域であり, 引き込み領域は E の増加と共に, すなわち外力振幅の増加と共に拡大する.

引き込み領域の外では, 外力に同調した単一振動数の解は安定に存在し得ず, 外力同調成分と自励振動成分が重畳した結合振動となる. 引き込み振動と結合振動の例を図 10.6 に示す. 図 10.6(a) と同図 (b) は加振振動数がわずかに異なるのみであるが, 応答がドラステックに変化していることがわかる.

参考図書

- (1) 谷口修編, 振動工学ハンドブック, 養賢堂, pp. 429–461, 1976.
- (2) 強制引き込みの簡易モデルに関しては, 次の文献を参考にした: 栗田他, 可変速度フィードバックによる振動搬送機械の自励振動駆動とアクティブ制振, 日本機械学会論文集 (C 編), 68 巻, 674 号, pp. 2859–2864, 2002.

演習問題 10

[1] レイリーの式

$$\ddot{x} - \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{1}{3} \dot{x}^3 \right) + \omega_0^2 x = 0 \quad (10.62)$$

において ε が微小であるとして, 平均法によって安定な定常解 (リミットサイクル解) を求めよ.

第11章

パラメータ励振振動

11.1 パラメータ励振系の例

系のダイナミクスを表現する微分方程式の係数が定数ではなく振動的に変化するような系を**パラメータ励振系 (parametrically excited system)**といい、そのような系に発生する振動を**パラメータ励振振動 (parametrically excited oscillation)**という。パラメータ励振振動とはどのようなものなのか、ここではいくつかの例を挙げてみよう。

11.1.1 ブランコ

ブランコに乗って遊ぶとき、小さな子供は自力では漕ぐことができないので他人に押しってもらうことになる。これは強制振動であり、自由振動の周期（固有周期）に同調させて押すことにより揺れを次第に大きくすることができる。つまり共振である。いっぽう、小学生くらいの子供になれば自力で漕ぐことを覚え、他人の力を借りることなく、揺れ幅を大きくしていくことができるようになる。これは振動系の外部からの力を必要としていないから強制振動による共振ではない。それではブランコを自力で漕いで振幅を成長させるメカニズムとはどのようなものだろうか。

あまり意識していないかもしれないが、ブランコを漕ぐとき、われわれはブランコの上で周期的に重心を上下させている。これを単純化すると、ブランコと人間を合わせた全体は、腕の長さが周期的に変化する振り子としてモデル化することができる。

おもりの質量を m 、腕の長さを $\ell(t)$ 、下死点からの腕の回転角を θ とすると、この系のラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta \quad (11.1)$$

であり、これより、系の運動方程式は

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{\ell}(t)}{\ell(t)}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell(t)} \sin \theta = 0 \quad (11.2)$$

左辺第2項はコリオリの力の項である。

特に、振動振幅が小さいときは、上式を平衡点 $\theta = 0$ まわりで線形化して、

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{\ell}(t)}{\ell(t)}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell(t)}\theta = 0 \quad (11.3)$$

となる。この式は、 $\theta, \dot{\theta}$ の係数が時間の関数であり、パラメータ励振系の運動方程式である。人がブランコを漕いでいるとき、重心の上下はブランコの固有周期に合わせた周期的な変化をしており、その周期はブランコの周期 T に対して $T/2$ である。すなわち、人はブランコが1往復する間に重心を2回上下させている。

11.1.2 支点が鉛直方向に上下する振り子

質量の無視できる長さ l の腕で釣り下げられた質量 m のおもりからなる振り子を考える。いま、振り子の支点を上下に動かすことを考えよう。支点の鉛直座標を y 、下死点からの腕の回転角を θ とすると、この系の運動方程式は次式ようになる。

$$\ddot{\theta} + \frac{g - \ddot{y}(t)}{l} \sin \theta = 0 \quad (11.4)$$

このような系では、支点を高い振動数で上下に動かすことによって、振り子を上死点周りで倒立状態に安定に保つことができることが知られている。下死点または上死点からの回転角が小さいときは、

$$\ddot{\theta} \pm \frac{g - \ddot{y}(t)}{l} \theta = 0 \quad (11.5)$$

と線形化される。

11.1.3 張力が変動する弦

長さ l の弦の中央に質量 m の質点を取り付けられた系を考える。弦の張力を T とすると、運動方程式は、

$$m\ddot{x} + \frac{4T}{l}x = 0 \quad (11.6)$$

弦の一端を引っ張って T を周期的に変化させるとき、これはパラメータ励振系になる。

その他、パラメータ励振振動を生じる工学的な例はいくらでもある。たとえば、電車のパンタグラフと架線からなる系では、パンタグラフと架線の接触点における架線の剛性が電車の走行に伴って周期的に変動するパラメータ励振系である。キー溝などが掘られた軸では、剛性が方向によって異なるため、そのような軸を回転したときの運動方程式はパラメータ励振系となる。歯車では、歯と歯の接触点における法線方向剛性がかみ合いによって変化するため、かみ合いによる振動を表す力学モデルは、かみ合い周波数を基本周波数として剛性が変動するパラメータ励振系になる。

11.2 平均法によるパラメータ励振系の解析

11.2.1 マシュー方程式の解析

前節で挙げた例では、線形化された運動方程式はいずれも、

$$\ddot{u} + p_1(t)\dot{u} + p_2(t)u = 0 \quad (11.7)$$

の形をしている。ここで、次の変数変換を導入する。

$$u = xe^{-\frac{1}{2} \int p_1(t) dt} \quad (11.8)$$

すると、式 (11.7) は次の形に変換される。

$$\ddot{x} + p(t)x = 0 \quad (11.9)$$

ここで、

$$p(t) = p_2(t) - \frac{1}{4}p_1^2(t) - \frac{1}{2}\dot{p}_1(t) \quad (11.10)$$

$p(t)$ を時間に関する周期関数とすると、式 (11.9) の形の微分方程式を**ヒルの方程式 (Hill's equation)** という。特に、 $p(t)$ が次の形、

$$p(t) = \delta + 2\epsilon \cos 2t \quad (11.11)$$

のとき、式 (11.9) は次式のようになるが、これを**マシューの方程式 (Mathieu's equation)** という。

$$\ddot{x} + (\delta + 2\epsilon \cos 2t)x = 0 \quad (11.12)$$

マシュー方程式は、パラメータ励振系を表す最も基礎的な方程式であり、実用的にも多くのパラメータ励振系をこの方程式で記述できるため有用性が高い。ここでは ϵ が微小であるとして、マシュー方程式を平均法で解いてみよう。

まず、状態方程式で書いて、

$$\dot{x} = y \quad (11.13)$$

$$\dot{y} = -(\delta + 2\epsilon \cos 2t)x \quad (11.14)$$

ブランコの例のように、係数の変動周波数の $1/2$ 倍と系の固有振動数が近接したときにパラメータ励振振動が生じることを予想して、母解を振動数 1 の調和振動解

$$x = a \cos \theta, \quad y = -a \sin \theta, \quad \theta = t + \varphi \quad (11.15)$$

とおく。さらに、元のマシュー方程式において $\epsilon = 0$ とした場合の固有振動数が $\sqrt{\delta}$ であることを考慮して、 $1 - \delta = O(\epsilon)$ と仮定する。式 (11.15) を式 (11.13), 式 (11.14) に代入して計算すると、次式を得る。

$$\dot{a} = -\{(1 - \delta) - 2\epsilon \cos 2(\theta - \varphi)\} a \cos \theta \sin \theta \quad (11.16)$$

$$\dot{\varphi} = -\{(1 - \delta) - 2\epsilon \cos 2(\theta - \varphi)\} \cos^2 \theta \quad (11.17)$$

右辺は $O(\epsilon)$ であり、また θ に関する周期 2π の周期関数であることより、平均法を用いると、平均化方程式は次式のようになる。

$$\dot{a} = \frac{1}{2}\epsilon a \sin 2\varphi \quad (11.18)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{2}(1 - \delta) + \frac{1}{2}\epsilon \cos 2\varphi \quad (11.19)$$

上式を解けば近似解が求まるわけだが見通しが悪い。そこで、変数変換

$$u = a \cos \varphi, \quad v = a \sin \varphi \quad (11.20)$$

を導入する。上式を時間微分したものに式 (11.18), 式 (11.19) を代入すると、

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{a} \cos \varphi - a \dot{\varphi} \sin \varphi \\ &= \frac{1}{2}(1 - \delta)a \sin \varphi + \frac{1}{2}\epsilon a \sin 2\varphi \cos \varphi - \frac{1}{2}\epsilon a \cos 2\varphi \sin \varphi \\ &= \frac{1}{2}\{(1 - \delta) + \epsilon\}v \end{aligned} \quad (11.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{a} \sin \varphi - a \dot{\varphi} \cos \varphi \\ &= -\frac{1}{2}(1 - \delta)a \cos \varphi + \frac{1}{2}\epsilon a \sin 2\varphi \sin \varphi + \frac{1}{2}\epsilon a \cos 2\varphi \cos \varphi \\ &= -\frac{1}{2}\{(1 - \delta) - \epsilon\}u \end{aligned} \quad (11.22)$$

ただし、各式最後の等号は、加法定理と式 (11.20) による。まとめると、

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\{(1 - \delta) + \epsilon\} \\ -\frac{1}{2}\{(1 - \delta) - \epsilon\} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (11.23)$$

これは定係数の線形微分方程式であり、解を

$$u = Ue^{st}, \quad v = Ve^{st} \quad (11.24)$$

とおけば、自明でない解を持つための条件として、特性方程式

$$s^2 + \frac{1}{4} \{(1 - \delta)^2 - \epsilon^2\} = 0 \quad (11.25)$$

を得る.

(i) $|1 - \delta| < \epsilon$ のとき

$$s = \pm \lambda_0, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2 - (1 - \delta)^2} \quad (11.26)$$

したがって、極は実数で片方がかならず不安定となる. この極の値を式 (11.23) に代入して解くことにより, u, v の時間応答は次のように書ける.

$$u = a_1 e^{\lambda_0 t} + a_2 e^{-\lambda_0 t} \quad (11.27)$$

$$v = a_1 \alpha e^{\lambda_0 t} - a_2 \alpha e^{-\lambda_0 t} \quad (11.28)$$

ここで $\alpha = \sqrt{\epsilon - 1 + \delta} / \sqrt{\epsilon + 1 - \delta}$ である. これを,

$$x = a \cos(t + \varphi) = u \cos t - v \sin t \quad (11.29)$$

に戻すと、近似解は,

$$x = a_1 (\cos t - \alpha \sin t) e^{\lambda_0 t} + a_2 (\cos t + \alpha \sin t) e^{-\lambda_0 t} \quad (11.30)$$

となって、第1項が振動的に発散することがわかる. これがパラメータ励振振動であり、発生条件は、系の固有振動数と係数変動の振動数の1/2が近いこと、すなわち、

$$|1 - \delta| < \epsilon \quad (11.31)$$

である.

(ii) $\epsilon < |1 - \delta| = O(\epsilon)$ のとき

$$s = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \delta)^2 - \epsilon^2} \quad (11.32)$$

したがって、極は1対の共役な純虚数である. この極の値を式 (11.23) に代入して解くことにより, u, v の時間応答は次のように書ける.

$$u = a_1 e^{i\omega_0 t} + a_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (11.33)$$

$$v = -i a_1 \beta e^{i\omega_0 t} + i a_2 \beta e^{-i\omega_0 t} \quad (11.34)$$

ここで $\beta = \sqrt{1 - \delta + \epsilon} / \sqrt{1 - \delta - \epsilon}$ である. オイラーの公式を使って、さらに $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = i(a_1 - a_2)$ とおくと,

$$u = b_1 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t \quad (11.35)$$

$$v = b_1 \beta \sin \omega_0 t - b_2 \beta \cos \omega_0 t \quad (11.36)$$

これを,

$$x = a \cos(t + \varphi) = u \cos t - v \sin t \quad (11.37)$$

に戻すと、近似解は,

$$x = (b_1 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t) \cos t + \beta (b_1 \sin \omega_0 t - b_2 \cos \omega_0 t) \sin t \quad (11.38)$$

したがって、応答は成長する振動にはならず、一般には周期運動でもない.

11.3 フローケ理論

周期的に変化する係数を持つ線形常微分方程式の解の安定性を論じる一般論として**フローケ (Floquet) 理論**があり、線形パラメータ励振系の安定判別に用いられる。ここでは、次の形を持つ1自由度パラメータ励振系を取り上げ、フローケ理論の概要について述べる。

$$\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = 0 \quad (11.39)$$

ここで、 $p_1(t), p_2(t)$ は周期 T の周期関数である。

式 (11.39) は2階の線形常微分方程式であるから、二つの基本解を持つ。これらを $u_1(t), u_2(t)$ とすると、 $u_1(t+T), u_2(t+T)$ もまた、式 (11.39) の解になる。なぜなら、

$$\begin{aligned} \ddot{u}_k(t+T) + p_1(t+T)\dot{u}_k(t+T) + p_2(t+T)u_k(t+T) &= \ddot{u}_k(t+T) + p_1(t)\dot{u}_k(t+T) + p_2(t)u_k(t+T) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11.40)$$

となるからである。さらに式 (11.39) のすべての解は基本解 $u_1(t), u_2(t)$ の重ね合わせで必ず書けることを考えると、 $u_1(t+T), u_2(t+T)$ もまた次の形に書くことができる。

$$\begin{bmatrix} u_1(t+T) \\ u_2(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (11.41)$$

または、

$$\mathbf{u}(t+T) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) \quad (11.42)$$

さて、上式の係数行列 \mathbf{A} の固有値を λ_1, λ_2 としよう。これらの固有値は次の特性方程式の解である。

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \Delta = 0 \quad (11.43)$$

ただし

$$\alpha = \frac{1}{2}\{a_{11} + a_{22}\}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (11.44)$$

このとき、適切な変換行列 \mathbf{P} による1次変換

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}\mathbf{v}(t) \quad (11.45)$$

によって、式 (11.42) の関係は、

$$\mathbf{v}(t+T) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{v}(t) = \mathbf{B}\mathbf{v}(t) \quad (11.46)$$

と書ける。ただし $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ は、固有値が相異なるときは

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (11.47)$$

なる対角行列である。固有値が等しい ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) 場合、独立な固有ベクトルが二つ存在するなら

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (11.48)$$

独立な固有ベクトルが一つしかない場合は

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \quad (11.49)$$

なる行列である。これらの行列は**ジョルダン標準形**と呼ばれている。

固有値が相異なるとき、および固有値が等しくジョルダン標準形が式 (11.48) のようになる場合は、ジョルダン標準形が対角行列になり、式 (11.45) の変換によって、

$$v_k(t+T) = \lambda_k v_k(t), \quad (k = 1, 2) \quad (11.50)$$

なる性質を持つ新しい基本解の組 $v_1(t), v_2(t)$ を得ることができる。上式より直ちに、解の安定性に関する評価

$$v_k(t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{if } |\lambda_k| < 1 \\ \infty & \text{if } |\lambda_k| > 1 \end{cases}, \quad (t \rightarrow \infty) \quad (11.51)$$

を得る。上記のいずれでもない場合、すなわち $|\lambda_k| = 1$ のときは解は有限範囲にとどまり続ける（リャプノフの意味で安定）。特に $\lambda_k = 1$ のときは v_k は周期 T の周期関数であり、また、 $\lambda_k = -1$ のときは v_k は周期 $2T$ の周期関数である。

いま、

$$\lambda_k = e^{\gamma_k T} \quad (11.52)$$

なる量 γ_k ($k = 1, 2$) を導入すると、式 (11.50) の関係より、

$$e^{-\gamma_k(t+T)} v_k(t+T) = e^{-\gamma_k t} e^{-\gamma_k T} e^{\gamma_k T} v_k(t) = e^{-\gamma_k t} v_k(t), \quad (k = 1, 2) \quad (11.53)$$

よって、

$$\phi_k(t) = e^{-\gamma_k t} v_k(t) \quad (11.54)$$

と定義すると、 ϕ_k は周期 T の周期関数になり、これを用いると、上式より、基本解 $v_1(t), v_2(t)$ は次のように書くことができる。

$$v_k(t) = e^{\gamma_k t} \phi_k(t), \quad (k = 1, 2) \quad (11.55)$$

次に、係数行列 \mathbf{A} の固有値が等しくジョルダン標準形が式 (11.49) のようになる場合は、式 (11.45) の変換によって、

$$v_1(t+T) = \lambda v_1(t) \quad (11.56)$$

$$v_2(t+T) = \lambda v_2(t) + v_1(t) \quad (11.57)$$

なる性質を持つ新しい基本解の組 $v_1(t), v_2(t)$ を得ることができる。 $v_1(t)$ については、式 (11.55) を導いたのと同様に、

$$\lambda = e^{\gamma T} \quad (11.58)$$

なる量 γ 、および $\phi_1(t+T) = \phi_1(t)$ なる周期関数を用いて

$$v_1(t) = e^{\gamma t} \phi_1(t) \quad (11.59)$$

なる形に書けることが示される。 $v_2(t)$ については、式 (11.57) の関係より、

$$e^{-\gamma(t+T)} v_2(t+T) = e^{-\gamma t} e^{-\gamma T} \{ e^{\gamma T} v_2(t) + e^{\gamma t} \phi_1(t) \} = e^{-\gamma t} v_2(t) + \frac{1}{\lambda} \phi_1(t) \quad (11.60)$$

これを用いると、

$$e^{-\gamma(t+T)} v_2(t+T) - \frac{t+T}{\lambda T} \phi_1(t+T) = e^{-\gamma t} v_2(t) - \frac{t}{\lambda T} \phi_1(t) \quad (11.61)$$

よって、

$$\phi_2(t) = e^{-\gamma t} v_2(t) - \frac{t}{\lambda T} \phi_1(t) \quad (11.62)$$

と定義すると、 ϕ_2 もまた周期 T の周期関数になり、これを用いると、基本解 $v_2(t)$ は次のように書くことができる。

$$v_2(t) = e^{\gamma_k t} \left\{ \phi_2(t) + \frac{t}{\lambda T} \phi_1(t) \right\} \quad (11.63)$$

式 (11.55), 式 (11.59), 式 (11.63) から次のことが結論づけられる。係数行列 \mathbf{A} のジョルダン標準形が式 (11.47) または式 (11.48) の形になる場合には、 γ_1, γ_2 の実部がともに正でない場合に解は有限範囲に収まる。いっぽう、係数行列 \mathbf{A} のジョルダン標準形が式 (11.49) の形になる場合には、 γ の実部が負の場合に解は有限範囲に収まる。

このように、 γ は解の安定性を支配するパラメータになっており、**特性指数**と呼ばれる。特性指数 γ はその定義 (式 (11.52) または式 (11.58)) より、行列 \mathbf{A} の固有値 λ から次式で計算される。

$$\gamma = \frac{1}{T} \ln \lambda \quad (11.64)$$

それでは、パラメータ励振系の微分方程式が具体的に与えられたとき、特性指数をどのように求めたらよいだろうか。そこでいったん最初に戻り、もともとの基本解 $u_1(t), u_2(t)$ を次の初期条件を満たすように選ぼう。

$$u_1(0) = 1, \quad \dot{u}_1(0) = 0 \quad (11.65)$$

$$u_2(0) = 0, \quad \dot{u}_2(0) = 1 \quad (11.66)$$

すると、式 (11.41) に $t = 0$ を代入することにより、

$$a_{11} = u_1(T), \quad a_{21} = u_2(T) \quad (11.67)$$

が得られ、さらに式 (11.41) を時間に関して 1 階微分して $t = 0$ を代入することにより、

$$a_{12} = \dot{u}_1(T), \quad a_{22} = \dot{u}_2(T) \quad (11.68)$$

が得られる。つまり、与えられた方程式について、式 (11.65), 式 (11.66) を初期値とする 1 周期分の応答を数値的に計算し、時刻 T での解とその導関数を求めることによって、式 (11.67), 式 (11.68) より係数行列 \mathbf{A} が得られる。あとは \mathbf{A} の固有値を式 (11.43) を解いて求めることによって、式 (11.64) より特性指数 γ を導出することができるのである。

特に、ヒルの方程式では、固有値の積は 1 に等しい。なぜなら、まず、解と係数の関係から固有値の積は式 (11.44) の Δ に等しい。式 (11.67), 式 (11.68) の関係から、これは次式のようなになる。

$$\Delta = u_1(T)\dot{u}_2(T) - \dot{u}_1(T)u_2(T) \quad (11.69)$$

ここで、 $u_1(t), u_2(t)$ は式 (11.65), 式 (11.66) を初期値とするヒルの方程式 (11.9) の解である。すなわちこれらは次式を満たす。

$$\ddot{u}_1 + p(t)u_1 = 0 \quad (11.70)$$

$$\ddot{u}_2 + p(t)u_2 = 0 \quad (11.71)$$

最初の式に u_2 を乗じたものと二つ目の式に u_1 を乗じたものとの差を取れば、

$$u_1\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1u_2 = 0 \quad (11.72)$$

これを積分して、

$$u_1(t)\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)u_2(t) = \text{const.} \quad (11.73)$$

上式左辺の値を $t = 0$ について計算すると 1 であり、したがって、上式左辺は恒等的に 1 である。上式の左辺に $t = T$ を代入したものは式 (11.69) の Δ に他ならないから、結局、 $\Delta = 1$ 、すなわち固有値の積は 1 であると結論づけられる。

このとき、固有値の値は、

$$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (11.74)$$

まず、 $|\alpha| > 1$ のとき、固有値は異なる実数であるが、積が1であることから、片方が1より大きくもう片方が1より小さくなることは明らかである。したがって解は不安定になる。 $|\alpha| < 1$ のとき、固有値は一对の共役な複素数になるが、積が1であることから、それらは単位円上に配置される。したがって、解は周期的ではないがリャプノフの意味で安定である。 $|\alpha| = 1$ のとき、二つの固有値は等しい値 $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ になり、 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ であれば解は周期 T の周期関数、 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ であれば周期 $2T$ の周期関数になる。

このようにヒルの方程式に支配される系では α の値が安定性を支配するが、特にマシュー方程式の場合は、 α は δ と ϵ の関数となる。 δ と ϵ の平面を $|\alpha(\delta, \epsilon)| \leq 1$ となる安定領域と $|\alpha(\delta, \epsilon)| < 1$ となる不安定領域に塗り分けたものはマシュー方程式の安定判別図として知られている。安定領域と不安定領域の境界線、すなわち $|\alpha(\delta, \epsilon)| = 1$ となる曲線は遷移曲線と呼ばれている。

参考図書

- (1) 安田仁彦, 振動工学 応用編, コロナ社, pp. 87–102, pp. 169–172, 2001.
- (2) A.H. Nayfeh and D.T. Mook, Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, pp. 258–364, 1979.

第12章

回転機械の振動

多くの機械は回転部分を持つ。回転部分を主要な構成要素とする機械を**回転機械**といい、回転する物体を**回転体**あるいは**ロータ (rotor)**という。回転体の最も簡単なモデルは、図 12.1 のように質量の無視できる軽い弾性軸に剛体円盤 (円柱) が取り付けられたものが一定速度で回転している、というモデル (**基本ロータ**) である。このような簡単なモデルであっても、軸のたわみ (円盤の並進) の表現に 2 自由度、軸の傾き (円盤の傾き) の表現に 2 自由度を割り当てた 4 自由度系となり、発生する運動は複雑なものとなる (図 12.1(a))。しかし、特別な場合として、軸方向に対称な形状の回転体においては、図 12.1(b) (c) のように軸のたわみ運動と傾き運動が連成しないため、そのどちらかに着目すれば、2 自由度モデルによる記述が可能である。

この章では対称回転体のたわみ運動についてのみ考慮した 2 自由度系を考える。この場合の回転体を**ジェフcottロータ (Jeffcott rotor)**という。

12.1 非減衰回転体の不釣り合いによる強制ふれまわり

理想的な回転体は完全な軸対称性を有しており、幾何学的な中心 (図心) と質量分布の中心 (重心) が完全に一致している。しかし、現実の機械においては重心と図心を完全に一致させることは難しく、実際には両者は距離 e だけ離れている。これを**不釣り合い**あるいは**偏心**といい、 e を**偏心量**という。

ここではジェフcottロータの不釣り合いによる強制ふれまわり運動について述べる。ジェフcottロータでは円盤は軸に垂直な平面内でのみ運動するため、円盤の並進量すなわち軸のたわみ量を表す 2 自由度で運動を記述することができる。

図 12.3 のように、剛体円盤の図心 S に軸が取り付けられており、 S を原点とする局所座標系 $S-\xi\eta$ が剛体円盤

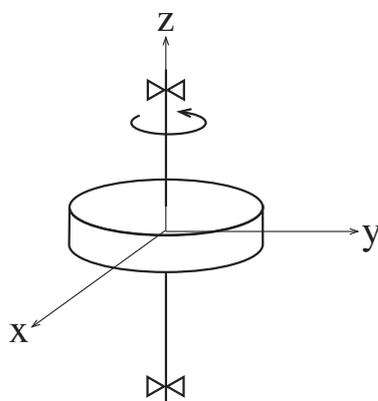
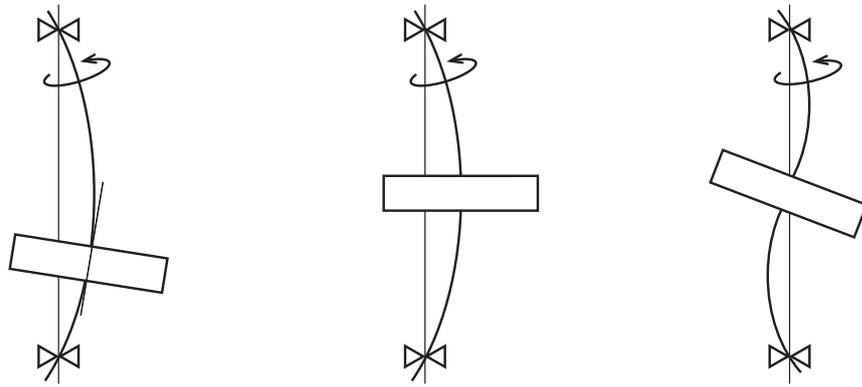


Fig. 12.1 基本ロータモデル



(a) 並進と傾きが連成 (b) 並進のみ (ジェフコットロータ) (c) 傾きのみ

Fig. 12.2 (a) 連成ロータと (b) (c) 非連成ロータ

上に固定されているとする。重心 G は S から距離 e 離れた位置にあり、局所座標系においてベクトル \vec{SG} が ξ 軸正方向となす角は ϕ であるとする。静的釣り合い時の図心の位置、すなわち軸受中心を原点にとった絶対座標系 $O-xy$ を定め、時刻 t における図心位置を $(x(t), y(t))$ 、重心位置を $(x_G(t), y_G(t))$ 、ベクトル \vec{SG} が x 軸正方向となす角を $\theta(t)$ とする。すると、図心の絶対座標と重心の絶対座標には、

$$x_G(t) = x(t) + e \cos \theta(t) \quad (12.1)$$

$$y_G(t) = y(t) + e \sin \theta(t) \quad (12.2)$$

なる関係がある。弾性軸のバネ定数はどの方向にも等しく k であるとする、剛体円盤の重心に関する運動方程式は、

$$m\ddot{x}_G(t) + kx(t) = 0 \quad (12.3)$$

$$m\ddot{y}_G(t) + ky(t) = 0 \quad (12.4)$$

重心周りの回転運動に対する運動方程式は、

$$I\ddot{\theta}(t) + ke x(t) \sin \theta(t) - ke y(t) \cos \theta(t) = \tau(t) \quad (12.5)$$

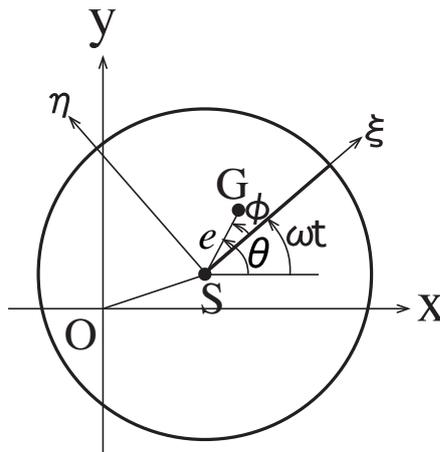


Fig. 12.3 座標系 (O : 軸受中心, S : 剛体円盤の図心 (軸の取り付け中心), G : 剛体円盤の重心)

ここで $\tau(t)$ は円盤に作用するモータのトルクである。

いま、回転体全体が角速度 ω の一定速度で回転していると仮定して、並進方向の運動にのみ注目する。回転速度一定の仮定より、一般性を損なわず $\theta(t) = \omega t + \phi$ とおける。すなわち $t = 0$ において ξ 軸正方向は x 軸正方向を向いていると仮定したことになる。式 (12.1), 式 (12.2) を用いて $x_G(t), y_G(t)$ を消去すると、

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = m\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad (12.6)$$

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = m\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \quad (12.7)$$

または、 x, y を消去して、

$$m\ddot{x}_G(t) + kx_G(t) = ke \cos(\omega t + \phi) \quad (12.8)$$

$$m\ddot{y}_G(t) + ky_G(t) = ke \sin(\omega t + \phi) \quad (12.9)$$

式 (12.6), 式 (12.7) または式 (12.8), 式 (12.9) は調和的な励振力の作用する運動方程式なので、一般解は右辺を 0 とおいた自由振動解と外力に同期した定常応答解の和である。ここでは定常応答解を求めていこう。

問題の扱いを簡単にするために、式 (12.6) + $i \times$ 式 (12.7) を作り、 $x(t) + iy(t) = z(t)$ とおくと、

$$m\ddot{z}(t) + kz(t) = m\omega^2 \exp\{i(\omega t + \phi)\} \quad (12.10)$$

が得られる。 $z(t)$ は絶対座標系での図心の座標を複素平面上の点として表現したものであり、上式を解いた解の実部が $x(t)$ 、虚部が $y(t)$ である。同様に、式 (12.8) + $i \times$ 式 (12.9) を作り、 $x_G(t) + iy_G(t) = z_G(t)$ とおくと、

$$m\ddot{z}_G(t) + kz_G(t) = ke \exp\{i(\omega t + \phi)\} \quad (12.11)$$

が得られる。 $z_G(t)$ は絶対座標系での重心の座標を複素平面上の点として表現したものであり、上式を解いた解の実部が $x_G(t)$ 、虚部が $y_G(t)$ である。

式 (12.10) と式 (12.11) の定常応答解を求める問題は、調和加振を受ける非減衰 1 質点系の定常応答を複素振幅の方法を用いて解く場合の運動方程式と同じ形であり、簡単に解くことができる。式 (12.10) の解を $z(t) = Z \exp\{i(\omega t + \phi)\}$ とおくと、

$$Z = \frac{m\omega^2}{-m\omega^2 + k} = \frac{e \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}{-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + 1} \quad (12.12)$$

ここで、 $\omega_c = \sqrt{k/m}$ である。上式に $\exp\{i(\omega t + \phi)\}$ をかけた解 $z(t) = Z \exp\{i(\omega t + \phi)\}$ が時刻 t における図心 S の位置を表すことに注意すると、次のことがわかる。

- 図心 S は原点 O (つまり軸受中心) まわりに角速度 ω で等速円運動をおこなう。このような運動を**ふれまわり運動**という。
- ふれまわり運動の半径は $|Z|$ で与えられる。
- 重心 G の図心 S 周りの回転運動 (ベクトル \vec{SG} の回転運動) に対する原点 O 周りの図心 S のふれまわり運動 (ベクトル \vec{OS} の回転運動) の位相遅れは $-\angle Z$ で与えられる。

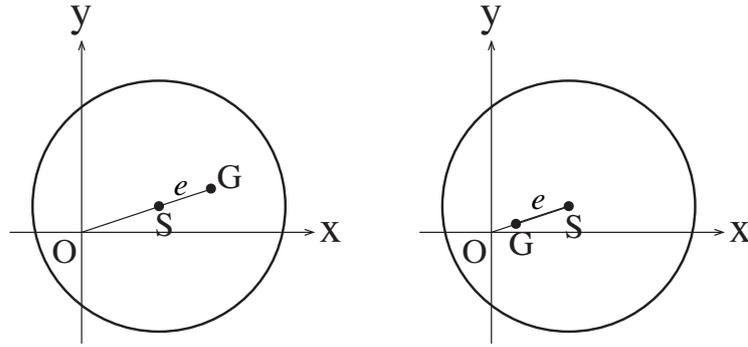
また、式 (12.11) の解を $z_G(t) = Z_G \exp\{i(\omega t + \phi)\}$ とおくと、

$$Z_G = \frac{ke}{-m\omega^2 + k} = \frac{e}{-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + 1} \quad (12.13)$$

さらに、式 (12.12) と式 (12.13) の間には次の関係がある。

$$Z_G = Z + e \quad (12.14)$$

上と同様に次のことがわかる。



(a) $0 < \omega < \omega_c$ のとき (b) $\omega > \omega_c$ のとき (自動調心作用)

Fig. 12.4 非減衰回転体の不釣り合いによる強制ふれまわり

- 重心 G は原点 O (つまり軸受中心) まわりに角速度 ω で等速円運動をおこなう.
- 円運動の半径は $|Z_G|$ で与えられる.
- 重心 G の図心 S 周りの回転運動 (ベクトル \vec{SG} の回転運動) に対する原点 O 周りの重心 G の回転運動 (ベクトル \vec{OG} の回転運動) の位相遅れは $-\angle Z_G$ で与えられる.

式 (12.12)~式 (12.14) より, 次のことがわかる.

(i) $0 < \omega < \omega_c$ のとき

$$\angle Z = \angle Z_G = 0 \quad (12.15)$$

つまり, z と z_G の回転角は同じであり, すなわち O, S, G は一直線上に並ぶ. さらに,

$$|Z_G| = Z_G = Z + e = |Z| + e \quad (12.16)$$

より, 並び順は O, S, G の順であることがわかる. そして図 12.4(a) のように, この位置関係を保ったまま回転する. 特に, $\omega \rightarrow 0$ のときは,

$$|Z| \rightarrow 0, \quad |Z_G| \rightarrow e \quad (12.17)$$

すなわち, 低速回転時には軸のたわみをほとんど生じることなく, 重心は軸まわりを旋回する.

(ii) $\omega \sim \omega_c$ のとき

図心 (軸の取り付け点) および重心の回転半径は非常に大きくなる. ($\omega = \omega_c$ において無限大.) したがって, 角速度 ω_c でロータを回転させることは大変危険であり, ω_c を**危険速度 (critical speed)** という.

(iii) $\omega > \omega_c$ のとき

$$\angle Z = \angle Z_G = -\pi \quad (12.18)$$

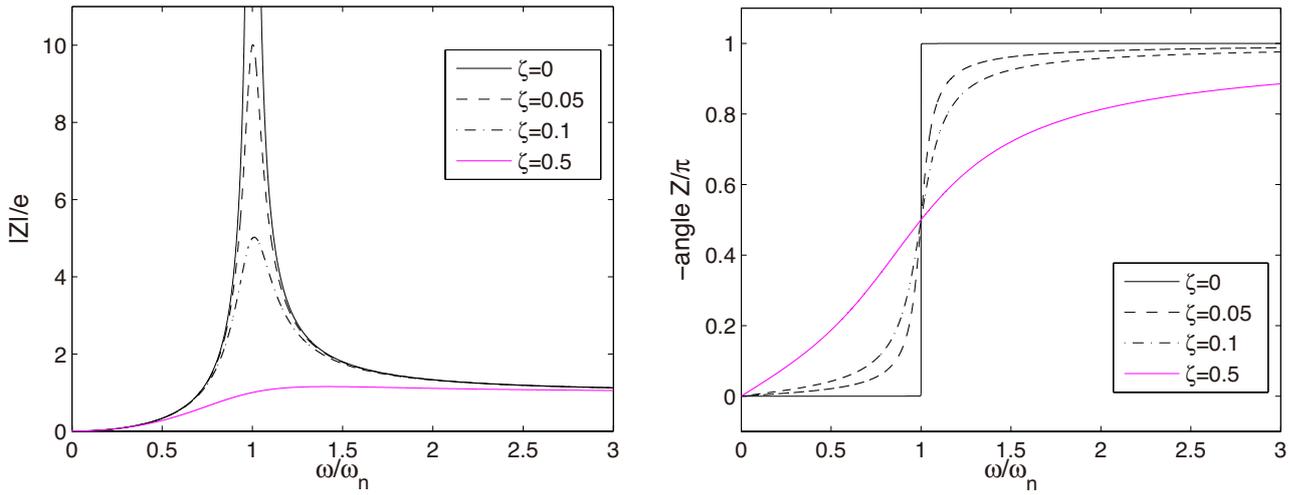
つまり, z と z_G の回転角は同じであり, すなわち O, S, G は一直線上に並ぶ. さらに,

$$|Z_G| = -Z_G = -Z - e = |Z| - e \quad (12.19)$$

より, 並び順は O, G, S の順であることがわかる. そして図 12.4(b) のように, この位置関係を保ったまま回転する. 特に, $\omega \rightarrow \infty$ のときは,

$$|Z| \rightarrow e, \quad |Z_G| \rightarrow 0 \quad (12.20)$$

すなわち, 危険速度をはるかに超えた高速回転時には, 重心はほとんど動かず, 図心 (軸の取り付け点) が重心まわりを旋回する. これを**自動調心作用 (self-centering)** という.



(a) ふれまわり半径

(b) 不釣り合いに対する位相遅れ

Fig. 12.5 不釣り合いによるふれまわり運動の共振曲線

Z の絶対値と偏角，すなわちふれまわり運動の半径と不釣り合いに対する位相遅れをプロットしたもの（すなわち共振曲線）が，図 12.5 の $\zeta = 0$ の曲線である．危険速度でふれまわりの半径が極めて大きくなること，危険速度より低速側では位相遅れがゼロであるのに対して，高速側では 180° であること，また，高速側ではふれまわり半径が e に収束することが見て取れる．

12.2 外部減衰を考慮する場合

前節では回転体の基本的なダイナミクスを明らかにするために，減衰の影響を考慮していなかった．もちろん，実際の回転体は，軸受や作動流体など回転体外部との相互作用による減衰力（**外部減衰**）を受ける．外部減衰は常にエネルギーを消散し，系を安定化する働きをする．いっぽう，たわみ変形による軸材料のヒステリシス減衰や焼きばめによる締結部での摩擦などの構造減衰といった，回転体内部に起因する減衰力（**内部減衰**）も作用する．これらの内部減衰要素も回転体の運動を妨げ，ふれまわりの発生を抑制するように思えるが，実は，かえってこれを助長する場合がある（後述）．ここでは外部減衰のみを考えよう．

前節と同様にして，剛体円盤の重心に関する並進方向の運動方程式は，

$$m\ddot{x}_G(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (12.21)$$

$$m\ddot{y}_G(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0 \quad (12.22)$$

ただし，外部粘性減衰の減衰係数はどの方向にも等しく c であるとした．式 (12.1)，式 (12.2) を用いて $x_G(t)$ ， $y_G(t)$ を消去すると，

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = mew^2 \cos \omega t \quad (12.23)$$

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = mew^2 \sin \omega t \quad (12.24)$$

定常応答解を仮定して，式 (12.23) + $i \times$ 式 (12.24) を作り， $x(t) + iy(t) = z(t)$ とおくと，

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = mew^2 \exp(i\omega t) \quad (12.25)$$

が得られる。式 (12.25) は、調和加振を受ける減衰 1 質点系を複素振幅の方法を用いて解く場合の運動方程式と同じ形であり、簡単に解くことができる。式 (12.25) の解を $z(t) = Z \exp(i\omega t)$ とおくと、

$$Z = \frac{m\epsilon\omega^2}{-m\omega^2 + k + i\epsilon\omega} = \frac{e\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}{-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + 1 + 2i\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \quad (12.26)$$

ここで、 $\zeta = \frac{\epsilon}{2\sqrt{mk}}$ である。

外部減衰が作用する場合の Z の共振曲線は、図 12.5 に示されている。

12.3 オートバランス

自動調心作用に関連したトピックとしてオートバランス（自動平衡装置）を取り上げよう。いま、図 12.6(a) のように、剛体円盤の外周にリング状の軌道を設け、同じ質量の二つの剛球を自在に移動可能なようにはめ込んだものを考える。これを回転させるとどうなるだろうか。

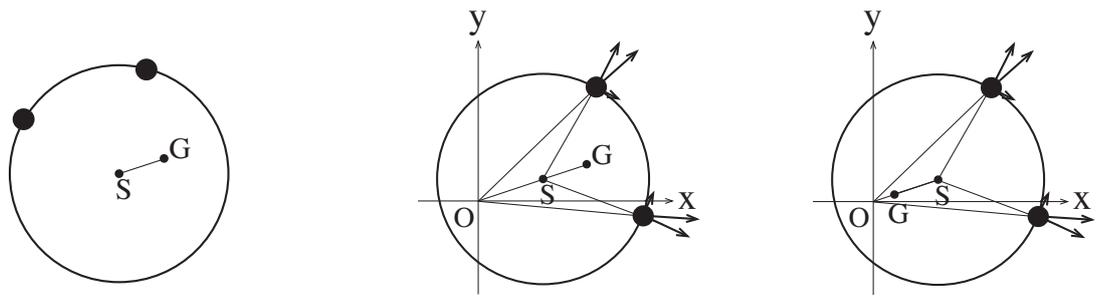
詳細な解析となるとそれなりに複雑であるが、ここでは簡単に考えてみよう。強制ふれまわりに関する上述の解析から、次の二つのケースが考えられる。

(i) $0 < \omega < \omega_c$ のときこのとき、剛体円板の図心 S 、重心 G および二つの剛球の位置関係は図 12.6(b) のようになる。剛球には遠心力が作用し、その接線分力によって剛球は直線 SG の重心側の延長線上に移動し、その結果、不釣り合いはますます増大し、ふれまわりの振幅が拡大する。このままの状態では危険であり避けなければならない。オートバランスの場合、回転数を上げて、次に述べる危険速度以上の速度域に速やかに到達させることで激しい振動の発生を回避する。

(ii) $\omega > \omega_c$ のときこのとき、剛体円板の図心 S 、重心 G および二つの剛球の位置関係は図 12.6(c) のようになる。剛球には遠心力が作用し、その接線分力によって剛球は直線 SG の重心と反対側の延長線上に移動しようとする。その結果、不釣り合いは減少し、ふれまわりの振幅が減少する。剛球に作用する遠心力と重心に作用する遠心力がちょうど釣り合うような位置に剛球が至ると、図心 S は原点 O に一致して、剛球に作用する遠心力の接線方向分力がゼロになるため、剛球は停止する。その後は不釣り合いが解消された状態で安定に回転を維持する。

これがオートバランスであり、危険速度を越える速度で回転させるスピンドルの振動抑止に用いられる。身近な例では、全自動洗濯機の洗濯槽に組み込まれた「流体バランス」がある。洗濯槽は振動絶縁のため軟らかいばねとダンパで支持されており、その結果、危険速度は極めて低い。脱水時には危険速度をはるかに超える高速度域で洗濯槽を回転させる必要があるため、リング状の容器に塩水を密封した流体バランスが用いられている。

以上のように、軸周りに回転自在に支持された質量体を有するロータ系は危険速度以上で安定な回転を維持することができるが、逆に、危険速度以下では上述のように危険な状態になる。これが問題になるケースの一例が、ヘリコプターにおける「地上共振」と呼ばれる現象である。ヘリコプターのロータブレードは多くの場合、ブレードの付け根にかかる負荷を逃がすためにリードラグジョイントというジョイントがあり、回転面内である程度の動きが許されるよう緩く固定されている。つまり、これが上述の剛球に相当する。一方、地上に接地したヘリコプターは着陸脚の軟らかさから、相当に軟らかく支持された振動系になっている。つまり、接地状態のヘリコプターのメインロータはまさに図 12.6(a) の状態になっている。ロータの低速回転時（停止直前など）に何らかの負荷（衝撃や風など）でいったんロータに不釣り合いが発生すると、図 12.6(b) の状態が生じ、最悪の場合、機体全体が破壊されるような致命的損傷に至る。これを地上共振（ground resonance）という。（Google などでも“ground resonance”と検索すると、ヘリコプターの機体が引きちぎれる衝撃的な実験映像を見つけることができるだろう。）



(a) 回転軌道上を移動可能な剛球を持つロータ (b) $0 < \omega < \omega_c$ のとき (c) $\omega > \omega_c$ のとき (オートバランス)
Fig. 12.6 オートバランス

12.4 減衰が作用する回転体における自励的なふれまわり現象

12.4.1 簡易モデルによる解析

前述のように、回転体には、回転体外部との相互作用による減衰力（外部減衰）の他に、たわみ変形による軸材料のヒステリシス減衰や焼きばめによる締結部での摩擦などの構造減衰といった、回転体内部に起因する減衰力（内部減衰）も作用する。これらの減衰要素は回転体の運動を妨げ、ふれまわりの発生を抑制するように思えるが、実は、かえってこれを助長する場合がある。このような現象を**自励的なふれまわり現象**とよび、次のような現象がよく知られている。

- ヒステリシスホワール（回転体の内部減衰による自励的なふれまわり）
- オイルホイップ（滑り軸受における潤滑油との相互作用による自励的なふれまわり）
- ドライホイップ（潤滑のない軸受の乾性摩擦による自励的なふれまわり）

このうち、特にオイルホイップは回転機械における異常振動の代表的なものであり、構造と流体との相互作用による複雑な非線形現象であるが、ここでは、簡単な線形モデルによってこれらを統一的に説明してみよう。

図 12.7 のジェフコットロータを考える。角速度 $\lambda\omega$ で回転する回転座標系 $O-x'y'$ を考え、この座標系での S の運動に対して減衰力が作用するものとする。 λ の値は、たとえば、外部減衰では $\lambda = 0$ 、内部減衰では $\lambda = 1$ 、滑り軸受における潤滑油の減衰なら $\lambda = 1/2$ 、といった具合である。この回転座標系での S の速度に比例する減

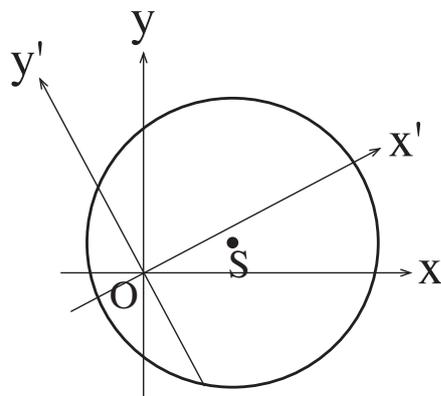


Fig. 12.7 静止座標系と回転座標系

衰力の粘性減衰係数を C_r , 静止座標系 $O-xy$ での S の速度に比例する減衰力 (外部減衰) の粘性減衰係数を C_e としよう.

回転座標系 $O-x'y'$ は $t=0$ で静止座標系 $O-xy$ に一致するとし, 時刻 t における剛体円盤の図心 S の位置を $O-xy$ 上で $(x(t), y(t))$, $O-x'y'$ 上で $(x'(t), y'(t))$ と表すと, $\theta = \lambda\omega t$ として,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (12.27)$$

より,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \lambda\omega \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (12.28)$$

であるから, $O-xy$ で表した減衰力 F_d は,

$$\begin{aligned} F_d &= -C_e \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} C_r \begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{bmatrix} \\ &= -C_e \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} - C_r \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ &\quad - C_r \lambda\omega \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= -(C_e + C_r) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} - C_r \lambda\omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.29)$$

よって, $O-xy$ で表した運動方程式は,

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_e + C_r & 0 \\ 0 & C_e + C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & C_r \lambda\omega \\ -C_r \lambda\omega & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\omega^2 \cos\omega t \\ m\omega^2 \sin\omega t \end{bmatrix} \quad (12.30)$$

上式の剛性マトリクスは非対角項の積が負であり, 9.2 節に述べたように自励振動の発生が予想される. 解析を簡単にするために, (第1式) $+ i \times$ (第2式) を作り, $x + iy = z$ とおくと,

$$m\ddot{z} + (C_e + C_r)\dot{z} + (k - iC_r\lambda\omega)z = m\omega^2 e^{i\omega t} \quad (12.31)$$

が得られる.

まず, 不釣り合い e が無視できるほど小さいとして上式の右辺をゼロとおき, 自由応答の安定性を調べよう.

$$m\ddot{z} + (C_e + C_r)\dot{z} + (k - iC_r\lambda\omega)z = 0 \quad (12.32)$$

上式の特性方程式は,

$$ms^2 + (C_e + C_r)s + (k - iC_r\lambda\omega) = 0 \quad (12.33)$$

より, 極は,

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} &= \frac{-(C_e + C_r) \pm \sqrt{(C_e + C_r)^2 - 4(k - iC_r\lambda\omega)}}{2m} \\ &= -(\zeta_e + \zeta_r)\omega_n \pm \omega_n \sqrt{(\zeta_e + \zeta_r)^2 + \frac{2i\zeta_r\lambda\omega}{\omega_n} - 1} \\ &\sim -(\zeta_e + \zeta_r)\omega_n \pm i\omega_n \left(1 - \frac{i\zeta_r\lambda\omega}{\omega_n}\right) \\ &= \pm\zeta_r(\lambda\omega \mp \omega_n) - \zeta_e\omega_n \pm i\omega_n \end{aligned} \quad (12.34)$$

ここで, $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\zeta_e = C_e/2\sqrt{mk}$, $\zeta_r = C_r/2\sqrt{mk}$ とおき, ζ_e, ζ_r はいずれも微小量であるとした.

上式は、自由応答が角速度 $\pm\omega_n$ のふれまわりになることを表している。虚部の符号から、 s_1 は前向きふれまわり、 s_2 は後ろ向きふれまわりに対応している。そこでそれぞれの実部の符号を調べて、前向きおよび後ろ向きふれまわり運動の安定性を論じよう。

(i) 角速度 ω_n の前向きふれまわり

$\zeta_r(\lambda\omega - \omega_n) - \zeta_e\omega_n > 0$ のとき、すなわち

$$\lambda\omega > \left(1 + \frac{\zeta_e}{\zeta_r}\right)\omega_n \quad (12.35)$$

で不安定。不等号が逆のとき安定。回転角速度 ω は正なので、不安定な自励的ふれまわりが発生するのは $\lambda > 0$ のときに限られる。

(ii) 角速度 $-\omega_n$ の後ろ向きふれまわり

$-\zeta_r(\lambda\omega + \omega_n) - \zeta_e\omega_n > 0$ のとき、すなわち

$$-\lambda\omega > \left(1 + \frac{\zeta_e}{\zeta_r}\right)\omega_n \quad (12.36)$$

で不安定。不等号が逆のとき安定。回転角速度 ω は正なので、不安定な自励的ふれまわりが発生するのは $\lambda < 0$ のときに限られる。

次に、不釣り合いが存在するとして、式 (12.31) の定常解を求めてみよう。解を $z = Ze^{i\omega t}$ とおいて複素振幅 Z について解くと、

$$Z = \frac{m\epsilon\omega^2}{-m\omega^2 + K + i\{C_e + (1 - \lambda)C_r\}\omega} \quad (12.37)$$

これは軸と同じ回転数でふれまわる運動の解である。特に $\lambda = 1$ (内部減衰) の場合には上式から C_r の項が消える。すなわち、内部減衰は定常運動成分には作用しないことがわかる。軸と同じ回転数でふれまわる運動時には、回転体内部には相対運動が起こらないことを考えると当然のことである。

12.4.2 ヒステリシスホワール

軸材料の応力ひずみ特性の履歴性によるヒステリシス減衰や、軸と回転体の焼きばめ部の摩擦などの構造減衰は、回転体の変形によって生じる内部減衰である。このような内部減衰の作用下において自励的なふれまわりが生じることが知られている。これをヒステリシスホワールという。ヒステリシスホワールは前向きふれまわりであり、危険速度より高速側で発生する。前節の表現でいうと $\lambda = 1$ であり、外部減衰が無視できる場合は、式 (12.35) で $\zeta_e = 0$ とおいた式より、確かに $\omega > \omega_n$ で不安定な前向きふれまわりが発生することがわかる。

12.4.3 オイルホイップとオイルホワール

軸受は転がり軸受とすべり軸受に分類される。すべり軸受は油膜によって荷重を支持する軸受であり、大荷重に耐え、潤滑状態がよければ半永久的な寿命を持つため回転機械 (特に高速の回転軸) に広く用いられている。すべり軸受のうち特に軸と垂直方向の荷重を支持する軸受 (いわゆるラジアル軸受) をジャーナル軸受という。ジャーナル軸受において油膜は等価的にばねとダンパとして働き、減衰効果が大きいので、振動を抑える意味でも望ましいのであるが、設計上の問題などがあると、高速度域において**オイルホイップ**と呼ばれる激しい自励振動が生じることがある。

軸の回転数を徐々に上げていくと、危険速度において不釣り合いによるふれまわりが大きく発生する。危険速度を通過するとこの運動は直ちになくなるが、さらに回転数を上げていくと、危険速度の2倍付近でオイルホイップを生じる。この振動は危険速度におけるそれと異なり、高速側の広い領域で発生する。

オイルホイップの発生回転数やふれまわりの方向は前節の議論で大雑把に説明できる。すなわち、軸が角速度 ω で回転している状況においては、油膜の流速は、軸受面上でゼロ、軸表面上で軸の周速に等しいから、油膜全体の平均的な回転速度は $\omega/2$ であると考えることができる。したがって、油膜に起因する減衰は、角速度 $\omega/2$ で回転する場において発生していると見ることができる。つまり、前節の表現でいうと $\lambda = 1/2$ であり、外部減衰が無視できる場合は、式(12.35)で $\zeta_e = 0$ とおいた式より、 $\omega > 2\omega_n$ で不安定な前向きふれまわりが発生することがわかる。

なお、危険速度を越えて回転数を上げていくと、オイルホイップが生じる回転数より低いある回転速度 ω_a 以上で、軸の回転数の0.5倍前後の回転数で小さな前向きふれまわりが発生することがある。これは**オイルホワール**と呼ばれる自励振動であり、油膜特性に起因する自励振動である。

12.4.4 ドライホイップ

間隙が多く潤滑が悪い軸受（現実的には、振れ止め（保護環）やケーシングなど）において見られる**ホイップング**（はね回り）は乾性摩擦に起因する振動現象である。間隙の多いドライ軸受を考える。軸が案内の中心で周囲に接触せず回転しているなら、この系は安定である。しかし、容易に想像できるように、いったん軸が周囲に接触すると、軸は回転方向と逆の方向に旋回を始める。

この現象は、前節における議論において $\lambda = -d/(D-d)$ とすることによって説明することができる。ここで D は軸受内径、 d は軸の直径である。すなわち、外部減衰が無視できるとすると、式(12.36)で $\zeta_e = 0$ 、 $\lambda = -d/(D-d)$ とおいた式より、 $\omega > (D-d)/d\omega_n$ で不安定な後ろ向きふれまわりが発生することがわかる。通常、 $0 < (D-d)/d \gg 1$ であるから、このふれまわりは危険速度よりかなり低速側でも発生しうる。

参考図書

- (1) 安田仁彦，振動工学 応用編，コロナ社，pp. 103–118, pp. 169–172, 2001.
- (2) 谷口修編，振動工学ハンドブック，養賢堂，pp. 905–907, pp. 951–955, 1976.
- (3) 山本敏男，石田幸男，回転機械の力学，コロナ社，2001.