

講義ノート

防振システム工学

2020 年度版

増田 新

京都工芸繊維大学

第1章

多自由度系（1）：運動方程式

今回は多自由度系の第1回として、まずいろいろな多自由度系の運動方程式を導出し、それらについて個別に議論した後、行列を用いた一般化された運動方程式の表現と、その性質について述べる。なお以下では、運動方程式において特に必要な場合以外は (t) を省略する。

1.1 質点系の運動方程式

1.1.1 2質点系

2質点非減衰系 比較的簡単な系では、物体に作用する力を数え上げることで運動方程式を組み立てることができる。図 1.1 のように、ばね、質点で構成される 2 自由度非減衰並進振動系を考える。質点 1 についての運動方程式は、

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = f_1 \quad (1.1)$$

質点 2 については、

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 x_2 = f_2 \quad (1.2)$$

これらを整理してまとめると、

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = f_1 \quad (1.3)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = f_2 \quad (1.4)$$

または行列形式でまとめると、

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

または

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1.6)$$

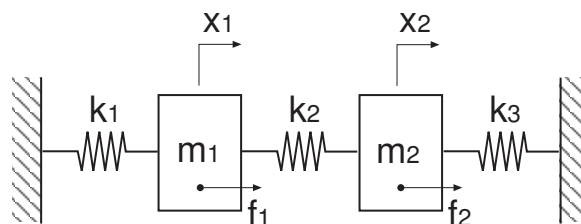


Fig. 1.1 2 質点非減衰並進振動系

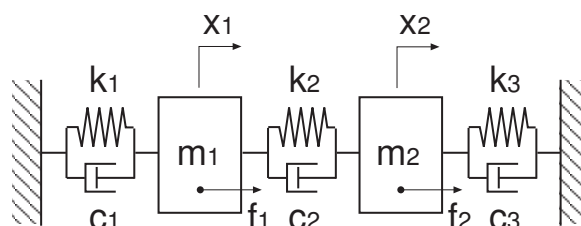


Fig. 1.2 2質点並進振動系

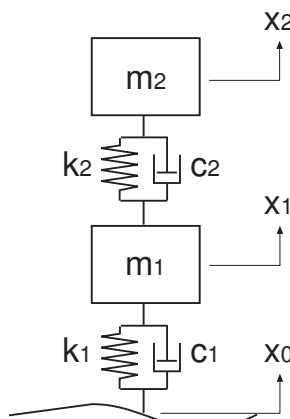


Fig. 1.3 サスペンションの一輪モデル

と書ける。M を質量行列，K を剛性行列という。

ここで K が対角行列でないことに注意，もし M と K がともに対角なら上式は質点 1 と質点 2 に関する二つの独立した運動方程式になる。これらの行列が 0 でない非対角成分を持つということは，二つの質点が連成していることを意味する。

2質点減衰系 次に，ばねと並列にダッシュポットを配置した図 1.2 の系では，運動方程式は

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

または

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1.8)$$

となる。C を減衰行列という。また M, C, K をまとめてこの系の特性行列という。この例ではダッシュポットはばねに並列に配置されているので，C は K と同形である。

サスペンションの一輪モデル 図 1.3 の 2 質点系はサスペンションの一輪モデルとしてよく用いられる。m1 はタイヤ，車軸などの質量を表しており，ばね下質量と呼ばれる。m2 は一輪あたりの車体質量を表しており，ばね上質量と呼ばれる。また k1, c1 はタイヤや車軸の剛性と減衰をモデル化したものであり，k2, c2 はサスペンションのばね定数と減衰係数である。系に対する入力 x0 なる変位励振であり，路面形状で決まる時間関数である。

運動方程式は，

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \dot{x}_0 + k_1 x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

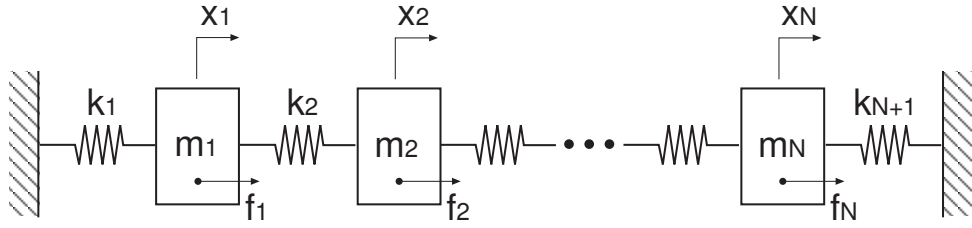


Fig. 1.4 N 質点非減衰並進振動系

となる。あるいは、 $x_1 - x_0 = y_1$, $x_2 - x_0 = y_2$ すなわち路面からの相対変位で座標を定義し直して運動方程式を立て直すと、

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \ddot{x}_0 \quad (1.10)$$

または

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{x}_0 \quad (1.11)$$

ここで $\mathbf{1} = [1 \ 1]^T$ である。

1.1.2 多質点系

図 1.4 の多質点系は、棒、軸などの細長い物体の振動を表す簡易モデルとしてよく用いられる。運動方程式は、

$$\begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & k_{N-1}+k_N & -k_N \\ 0 & 0 & \cdots & -k_N & k_N+k_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

となる。ばねに並列にダッシュポットが入った場合も前と同じ要領である。また、片持ち型の系の場合は上式で最後のばね定数を 0 にすればよいが、これはビルディングのモデルなどに使われる。

1.2 剛体系の運動方程式

前節でサスペンションの一輪モデルとして変位励振を受ける 2 質点モデルを紹介したが、車体全体の上下動とピッチング（車軸と平行な軸まわりの回転運動）を考慮したモデルとして、図 1.5 のような弾性支持された剛体モデルを立てることができる。ここで重心の前後方向の動きは考慮しないものとする。

車体の動きを表す変数（座標）として、上下方向変位 z と回転角 θ をとる。まず車体の上下方向の運動方程式は、

$$m\ddot{z} + k_1(z - L_1\theta - w_1) + k_2(z + L_2\theta - w_2) = 0 \quad (1.13)$$

となる。次に重心まわりの回転に関する運動方程式は、

$$I_y\ddot{\theta} - k_1L_1(z - L_1\theta - w_1) + k_2L_2(z + L_2\theta - w_2) = 0 \quad (1.14)$$

となる。これらを整理してまとめると、

$$m\ddot{z} + (k_1 + k_2)z - (k_1L_1 - k_2L_2)\theta = k_1w_1 + k_2w_2 \quad (1.15)$$

$$I_y\ddot{\theta} - (k_1L_1 - k_2L_2)z + (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\theta = -k_1L_1w_1 + k_2L_2w_2 \quad (1.16)$$

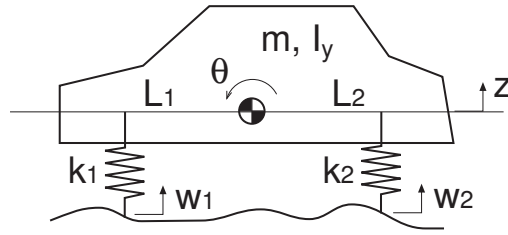


Fig. 1.5 二輪サスペンションモデル

または行列形式で

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -(k_1 L_1 - k_2 L_2) \\ -(k_1 L_1 - k_2 L_2) & k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 w_1 + k_2 w_2 \\ -k_1 L_1 w_1 + k_2 L_2 w_2 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

を得る。上式の剛性行列は0でない非対角成分を持つので、一般に上下動とピッチングは連成することがわかる。ただし、 $k_1 L_1 = k_2 L_2$ となるように重心位置とばね定数を設計できれば、上下動とピッチングを独立にすることができる。

1.3 ラグランジュの運動方程式による導出

対象とする系が複雑になってくると、解析力学の手法、すなわちハミルトン原理やラグランジュの運動方程式を使用すると運動方程式を導出する際の煩雑さを低減し、思わぬ間違いを防ぐことができる。特に多自由度の質点系や剛体系の場合、ラグランジュの運動方程式が便利である。

ラグランジュの運動方程式自体の導出についてはここでは触れないが、自学の助としてストーリーだけ示しておこう。質点系に対してダランベールの原理と仮想仕事の原理を用いると、次の**ハミルトン原理**が導かれる。

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \overline{\delta W}) dt = 0, \quad \delta x_j(t_1) = \delta x_j(t_2) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (1.18)$$

ここで、 T は系全体の運動エネルギー、 $\overline{\delta W}$ は**仮想仕事**、 $\delta x_j(t)$ は時刻 t における j 番目の座標変数に対する**仮想変位**、 δ は変分記号である。仮想変位とは系の位置座標 $x_j(t)$ に与えた無限小の変動（変分という）であり、本来の質点の動きを仮想的に少しだけずらしたときのずれ量と解釈できる。仮想変位は任意であるが、系の拘束条件を満たしていなければならない。また、ハミルトン原理の導出においては、さらに時刻 t_1 と時刻 t_2 でゼロであることが要請される。仮想仕事とは、系に仮想変位を与えたとき質点に作用している力 $\delta x_j(t)$ が質点に与える仕事の総和であり、

$$\overline{\delta W} = \sum_{j=1}^J f_j \delta x_j \quad (1.19)$$

と表される。上付きのバーは $\overline{\delta W}$ が微小変量を表す一つの記号であり、 W なる量の変分ではないことを示すために付けられる。

さらに、質点に作用する力を保存力と非保存力に分けて、仮想仕事を保存力がなす仮想仕事 $\overline{\delta W}_c$ と非保存力がなす仮想仕事 $\overline{\delta W}_{nc}$ の和として表現すると、前者は次のように書ける。

$$\overline{\delta W}_c = -\delta U \quad (1.20)$$

ここで U は保存力に対するポテンシャルエネルギーの総和である。これを用いると、式 (1.18) は次式のように書き直すことができる。

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \overline{\delta W}_{nc}) dt = 0, \quad \delta x_j(t_1) = \delta x_j(t_2) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (1.21)$$

ここで、 L は**ラグランジアン**であり、

$$L = T - U \quad (1.22)$$

で定義される。

式 (1.18) または式 (1.21) のハミルトン原理は座標を用いずにエネルギーのみを使って書かれており、質点系のみならずニュートン力学系全般に対して成立する一般原理である。したがって、無限の自由度を持つ連続体（たとえばはりや板など）の運動方程式を導くために用いることもできる。さらに機械系に電気系が連成した電気機械結合系を表すことも可能である。

ラグランジュの運動方程式は、有限個の座標変数で表現できる系について、ハミルトン原理を適用する際に共通な計算をあらかじめ行っておくことによって使いやすく書き下したものの、と位置付けることができる。まず、系の静的な状態（各質点の位置、剛体の位置と姿勢）を表現する最小個数の変数 $q_1, \dots, q_N$ を設定する。これを**一般化座標**という。一般化座標はたとえば角度などでもよく、必ずしも長さの次元を持っているとは限らない。ラグランジアンを一般化座標 $q_1, \dots, q_N$ およびその速度 $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N$ の関数として表現し、ハミルトン原理を適用して計算すると次のラグランジュの運動方程式が得られる（導出は 1.5 参照）。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \quad (j = 1, \dots, N) \quad (1.23)$$

ここで V は減衰要素によって消費される単位時間あたりのエネルギー（パワー）の 1/2 で、**散逸関数**と呼ばれる。

Q_j は**一般化力**と呼ばれる。一般化力は、系に作用する力のうち、保存力と粘性減衰力を除いたもの（粘性減衰力以外の減衰力（摩擦力など）や外力が含まれる）を一般化座標系で表したものである。これは仮想仕事に対して座標変換を適用することによって得られる。いま、基本となる座標系を平衡点（静的釣り合い状態における静止点）に原点を持つ直交位置座標 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_J]^T$ （以下、絶対座標と呼ぶ。）として、この座標系での保存力と粘性減衰力を除いた力のベクトルの成分表示を $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_J]^T$ とすると、仮想仕事は式 (1.19) で表されるようになる。次にこれを、一般化座標 $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_N]^T$ で書き直してみよう。まず、仮想変位の部分は、座標変換式

$$x_j = x_j(q_1, \dots, q_N) \quad (1.24)$$

より、

$$\delta x_j = \sum_{k=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \delta q_k \quad (1.25)$$

すると、

$$\overline{\delta W} = \sum_{j=1}^J f_j \delta x_j = \sum_{j=1}^J f_j \sum_{k=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^J \frac{\partial x_j}{\partial q_k} f_j \delta q_k = \sum_{k=1}^N Q_k \delta q_k \quad (1.26)$$

ここで、

$$Q_k = \sum_{j=1}^J \frac{\partial x_j}{\partial q_k} f_j \quad (1.27)$$

とおいた。この $Q_1, \dots, Q_N$ こそが、一般化座標 $[q_1, \dots, q_N]^T$ から見た力の表現であり、**一般化力**と呼ばれている。「力に対する座標変換」ということに少し奇異な印象を受けるかもしれないが、変位とかけ算したときに「仕事」になる関係を保つためには、位置の座標変換に伴って力の座標変換が必要になることは了解可能だろう。であるから、一般化力は必ずしも力の次元を持っているとは限らない。 q_j が角度なら対応する一般化力 Q_j はモーメントになる。

あるいは、ここまでを行列形式で書き直してみると以下のようなになる。まず、仮想仕事は、

$$\overline{\delta W} = \mathbf{f}^T \delta \mathbf{x} \quad (1.28)$$

座標変換式 (1.24) より,

$$\delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \quad (1.29)$$

ここで

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial q_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial q_N} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

は座標変換のヤコビ行列である。すると,

$$\overline{\delta W} = \mathbf{f}^T \delta \mathbf{x} = \mathbf{f}^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \mathbf{f} \right\}^T \delta \mathbf{q} = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} \quad (1.31)$$

したがって, 一般化力は,

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \mathbf{f} \quad (1.32)$$

と書ける。上式から, 一般化力とは, 変位の座標変換式のヤコビ行列の転置で力を 1 次変換したものであることがわかる。

ラグランジュの運動方程式はエネルギーというスカラ量をベースに計算が進み, 特に煩わしい力の座標変換 (分力への分解) を意識して行う必要がないため (計算過程において自動的に実行される), 複雑な系の運動方程式を間違いなく導出することができる。解き方の手順をまとめると以下のようになる:

1. 一般化座標を選定する。
2. 絶対座標系から一般化座標系への座標変換式を導出する。
3. 座標変換式の時間微分, 座標変換式の一般化座標に関する偏微分を計算する。
4. 運動エネルギー, ポテンシャルエネルギー, 散逸関数, 仮想仕事を絶対座標系で表す。
5. 2., 3. で求めた座標変換式およびその時間微分を用いて運動エネルギー, ポテンシャルエネルギー, 散逸関数を一般化座標系で表す。
6. 3. で求めた座標変換式の偏微分を用いて式 (1.27) から一般化力を導出する。
7. ラグランジュの運動方程式 (1.23) を計算する。

一般化座標の選定には直観力を働かせて, あとは機械的に一气呵成に計算を進めるのが成功のこつである。

例題：2 質点基礎励振系

図 1.3 の 2 質点系において, 各質点に外力 f_1, f_2 が作用するとしたときの運動方程式をラグランジュの運動方程式を用いて求めてみよう。

(A) 絶対座標系における運動方程式

まずは, 一般化座標として絶対座標を採用した場合から,

運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは,

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (1.33)$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 \quad (1.34)$$

ダッシュポットによる散逸関数は,

$$V = \frac{1}{2}c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_0)^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 \quad (1.35)$$

一般化力は, 外力による仮想仕事

$$\overline{\delta W} = f_1\delta x_1 + f_2\delta x_2 \quad (1.36)$$

より, $Q_1 = f_1, Q_2 = f_2$ である. これらをラグランジュの運動方程式に代入して計算すると, 式 (1.9) を得る.

(B) 基礎からの相対座標系における運動方程式

次に, 一般化座標として基礎からの相対座標 $y_1 = x_1 - x_0, y_2 = x_2 - x_0$ を採用してみよう.

運動エネルギーとポテンシャルエネルギー, 散逸関数の式 (式 (1.33)~式 (1.35)) に座標変換式 $x_1 = y_1 + x_0, x_2 = y_2 + x_0$ を適用すると,

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{y}_1 + \dot{x}_0)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y}_2 + \dot{x}_0)^2 \quad (1.37)$$

$$U = \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2 \quad (1.38)$$

$$V = \frac{1}{2}c_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 \quad (1.39)$$

一般化力は, 仮想仕事の式 (1.53) に座標変換式 $x_1 = y_1 + x_0, x_2 = y_2 + x_0$ を適用して,

$$\overline{\delta W} = f_1\delta y_1 + f_2\delta y_2 \quad (1.40)$$

より, $Q_1 = f_1, Q_2 = f_2$ である. これらをラグランジュの運動方程式に代入して計算すると, 式 (1.10) を得る.

(C) ばね両端の相対座標系における運動方程式

最後にもうひとつ, ばねの両端の相対変位 $z_1 = x_1 - x_0, z_2 = x_2 - x_1$ を一般化座標として採用した場合の運動方程式を求めてみよう. 運動エネルギーとポテンシャルエネルギー, 散逸関数, 仮想仕事の式 (式 (1.33)~式 (1.53)) に座標変換式 $x_1 = z_1 + x_0, x_2 = z_1 + z_2 + x_0$ を適用すると,

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{z}_1 + \dot{x}_0)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{z}_1 + \dot{z}_2 + \dot{x}_0)^2 \quad (1.41)$$

$$U = \frac{1}{2}k_1z_1^2 + \frac{1}{2}k_2z_2^2 \quad (1.42)$$

$$V = \frac{1}{2}c_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}c_2\dot{z}_2^2 \quad (1.43)$$

$$\overline{\delta W} = f_1\delta z_1 + f_2(\delta z_1 + \delta z_2) = (f_1 + f_2)\delta z_1 + f_2\delta z_2 \quad (1.44)$$

最後の式から, $Q_1 = f_1 + f_2, Q_2 = f_2$ と求められる. これらの一般化力と式 (1.41)~式 (1.43) をラグランジュの運動方程式に代入して計算すると, 次式を得る.

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + f_2 \\ f_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 + m_2 \\ m_2 \end{bmatrix} \ddot{x}_0 \quad (1.45)$$

例題：クレーンモデル

並進運動と回転運動が連成した系の例として, 天井クレーンの振動を模した図 1.6 の系を考えよう. まず一般化座標を $(q_1, q_2) = (x_1, \theta)$ と決める. また絶対座標系での質点 2 の座標を (x_2, y_2) としておく. 次に絶対座標系と一般化座標の座標変換を明らかにする.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + L \sin \theta & \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + L \dot{\theta} \cos \theta \\ y_2 &= L(1 - \cos \theta) & \dot{y}_2 &= L \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (1.46)$$

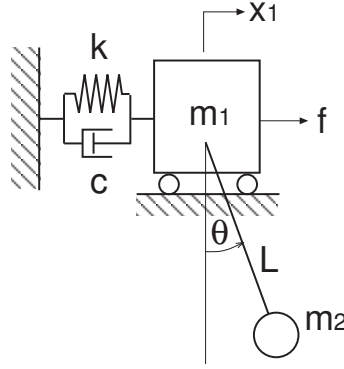


Fig. 1.6 クレーンモデル

運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは,

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 \quad (1.47)$$

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + mgy_2 \quad (1.48)$$

となり, 式 (1.46) で座標変換すると,

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + m_2L\dot{x}_1\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}m_2L^2\dot{\theta}^2 \quad (1.49)$$

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + mgL(1 - \cos\theta) \quad (1.50)$$

となる. ダッシュポットによる散逸関数は,

$$V = \frac{1}{2}c\dot{x}_1^2 \quad (1.51)$$

一般化力は, 外力 f による仮想仕事

$$\overline{\delta W} = f\delta x_1 = Q_1\delta x_1 + Q_2\delta\theta \quad (1.52)$$

より,

$$Q_1 = f, \quad Q_2 = 0 \quad (1.53)$$

である.

これらからラグランジュの運動方程式に含まれるラグランジュ関数の偏微分を計算すると,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2L\dot{\theta}\cos\theta \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -kx_1 \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2L\dot{x}_1\cos\theta + m_2L^2\dot{\theta} \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2L\dot{x}_1\dot{\theta}\sin\theta - mgL\sin\theta \quad (1.57)$$

これらと式 (1.51), 式 (1.53) をラグランジュの運動方程式に代入して計算すると, 次の運動方程式を得る.

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2L\ddot{\theta}\cos\theta + c\dot{x}_1 + kx_1 - m_2L\dot{\theta}^2\sin\theta = f \quad (1.58)$$

$$m_2L\ddot{x}_1\cos\theta + m_2L^2\ddot{\theta} + m_2gL\sin\theta = 0 \quad (1.59)$$

平衡点まわりの微小振動を考えると、平衡点 $x_1 = \theta = 0$ まわりで線形化して2次以上の項を省略すると、

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 L \ddot{\theta} + c\dot{x}_1 + kx_1 = f \quad (1.60)$$

$$m_2 L \ddot{x}_1 + m_2 L^2 \ddot{\theta} + m_2 g L \theta = 0 \quad (1.61)$$

を得る。行列形式で書くと、

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 L \\ m_2 L & m_2 L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_2 g L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

となり、慣性項を介して二つの一般化座標が連成していることがわかる。

1.4 特性行列の対称性と相反定理

今までの例では特性行列 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ は全て対称行列になっていた。実は、運動方程式を立てる際にあるルールを守れば特性行列は常に対称になる。これについて説明する前に、まず特性行列が対称にならない例を示そう。

図 1.7 の2質点系について、まずは普通に運動方程式を求めると、

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = f_1 \quad (1.63)$$

$$m_2 \ddot{x}_1 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = f_2 \quad (1.64)$$

または行列形式で、

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

となり、特性行列は対称である。次に同じ系について今度は座標系の取り方を変えて、隣の質点からの相対変位 $u_1 = x_1, u_2 = x_2 - x_1$ で表したとすると、運動方程式は、

$$m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_2 u_2 = f_1 \quad (1.66)$$

$$m_2 (\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2) + k_2 u_2 = f_2 \quad (1.67)$$

行列形式でまとめると、

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

となって特性行列は対称にならない。このような例は座標変換によっていくらでも作ることができる。

実は「あるルール」とは、

位置と力に対して同じ座標系を用いよ

ということである。上の例では位置（変位）座標として相対座標を用いたのに、力のほうは絶対座標系で考えており、ちぐはぐになっている。同じルールをもう少しきちんと表現すると、

選んだ一般化座標に対する一般化力で力を表現せよ

ということである。つまりもし一般化座標の取り方を変えれば、連動して力の表現も変えておく必要がある。たとえば一般化座標を $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_N]^T$ から $\mathbf{q}' = [q'_1, \dots, q'_N]^T$ に変更したとして、変更前の座標系における一般化力を $\mathbf{Q}$ 、座標変換の式を

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(q'_1, \dots, q'_N) \quad (1.69)$$

と書いたとすると、変更前の座標系での仮想仕事は

$$\overline{\delta W} = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} \quad (1.70)$$

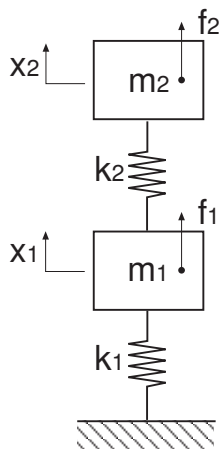


Fig. 1.7 2質点非減衰並進振動系

座標変換式 (1.69) を代入すると,

$$\delta W = \mathbf{Q}^T \Phi \delta \mathbf{q}' = (\Phi^T \mathbf{Q})^T \delta \mathbf{q}' \quad (1.71)$$

ここで

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial q'_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial q'_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial q_N}{\partial q'_1} & \cdots & \frac{\partial q_N}{\partial q'_N} \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

は座標変換のヤコビ行列である。式 (1.71) より, 新しい座標系での一般化力は $\Phi^T \mathbf{Q}$ となり, 上のルールを守るためには力のほうも $\mathbf{Q}' = \Phi^T \mathbf{Q}$ と変換する必要があることがわかる。

このルールを用いて運動方程式の座標変換を行ってみよう。元の運動方程式を

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1.73)$$

として, 線形座標変換 $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}'$ を施したとすると,

$$\mathbf{M}\mathbf{T}\ddot{\mathbf{x}}' + \mathbf{C}\mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}' + \mathbf{K}\mathbf{T}\mathbf{x}' = \mathbf{f} \quad (1.74)$$

となる。上の議論にしたがって力も座標変換すると, 新しい一般化力を与える座標変換行列は $\mathbf{T}^T$ となって,

$$\underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}}_{\mathbf{M}'} \ddot{\mathbf{x}}' + \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T}}_{\mathbf{C}'} \dot{\mathbf{x}}' + \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}}_{\mathbf{K}'} \mathbf{x}' = \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{f}}_{\mathbf{f}'} \quad (1.75)$$

したがって, 元の特性行列が対称なら座標変換後の特性行列も対称となり, 対称性は保存されることがわかる。

先の2質点系の例では, 絶対座標系から相対座標系に変換する際に,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

なる座標変換行列を使って変換を行ったので, 力の座標系を整合させるためには式 (1.68) に左から $\mathbf{T}^T$ をかけて,

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + f_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

とするのが正しい。

最後に、線形な系では特性行列は必ず対称になることを簡単に示しておこう。「元の特性行列が対称なら座標変換後の特性行列も対称」であることに注目すると、ある特別な座標系で特性行列が対称になることを示すことができる、全ての座標系での対称性を示したことになる。

簡単のために、ばねとダッシュポットで相互に結合された質点系を考える。まず質量行列について、絶対座標系では明らかに対角行列となり、したがって対称である。次に剛性行列について、ばねの両端の変位を並べた相対座標系を考えると、この座標系ではばねの変形-復元力関係を表す剛性行列はばね定数を対角要素に持つ対角行列になる。微小変位を仮定すればこの相対座標系と他の全ての座標系は線形変換で関係づけられるので、任意の座標系において剛性行列は対称性を持つ。減衰行列についても、ダッシュポット両端の相対速度と減衰力の関係が対角行列で表されることから、任意の座標系における対称性を示すことができる。

補遺

- 特性行列の対称性はモード解析において重要になる。
- 材料力学で **Maxwell の相反定理** を学んだと思うが、Maxwell の相反定理とは剛性行列の逆行列（これを**たわみ行列** (flexibility matrix) という）の対称性の言い換えに他ならない。たわみ行列の i 行 j 列要素は、点 j に加えた単位力によって点 i で生じた変形を表すので、「剛性行列が対称」→「たわみ行列も対称」→「点 j に加えられた単位力によって点 i で生じる変形と点 i に加えられた単位力によって点 j で生じる変形は等しい (Maxwell の相反定理)」となる。
- 一般に線形な物理系においては変位（またはその導関数）と力との間には同種の対称性があり、これを**相反性** (reciprocity) という。

1.5 ラグランジュの運動方程式の導出 *

ハミルトン原理の式 (1.21) のラグランジアンを一般化座標で表現することによってラグランジュの運動方程式を導く。まず、

$$L = L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) \quad (1.78)$$

と書く。するとその変分は、

$$\delta L = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) \quad (1.79)$$

また、非保存力の仮想仕事は式 (1.26) に示したように、

$$\overline{\delta W}_{nc} = \sum_{k=1}^N Q_{knc} \delta q_k \quad (1.80)$$

と書ける。ここで Q_{knc} は非保存力の一般化力である。式 (1.79) と式 (1.80) を式 (1.21) に代入し、位置座標を一般化座標に書き換えると、

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} + Q_{knc} \right) \delta q_k \right] dt = 0, \quad \delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.81)$$

ここで、次のように変分操作と時間微分操作は交換可能である。

$$\delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt} \delta q_k \quad (1.82)$$

これに注意して式 (1.81) 右辺の積分内第 1 項の部分積分を行う。

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \delta q_k dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt \quad (1.83)$$

これを式 (1.81) に戻すと,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^N \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_k} + Q_{knc} \right] \delta q_k dt = 0, \quad \delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.84)$$

最後に, 仮想変位の任意性より, 次式を得る.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{knc}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.85)$$

演習問題

- [1] 図 1.8 のように, 中心周りに一定の角速度 ω で回転する半径 r の円板に, 腕の長さ ℓ の振り子を取り付けてある. 重力は無視できるとして, 振り子の運動方程式を導け.
- [2] 図 1.9 のように, バネで保持された円弧軌道上を円柱がすべらずに転がる振動系を考える. 振動系の運動方程式を導け. また, 振動振幅が微小であるとして運動方程式を線形化せよ.

解答

- [1] これは 1 自由度系であるが, ラグランジュの運動方程式の練習として解いてみよう.

まず, 絶対座標系 $O-xy$ を図のように設定する. 一般化座標を円板に対する振り子の回転角 θ とする.

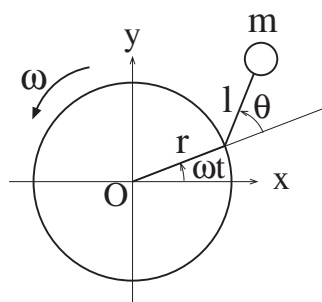


Fig. 1.8 遠心振り子

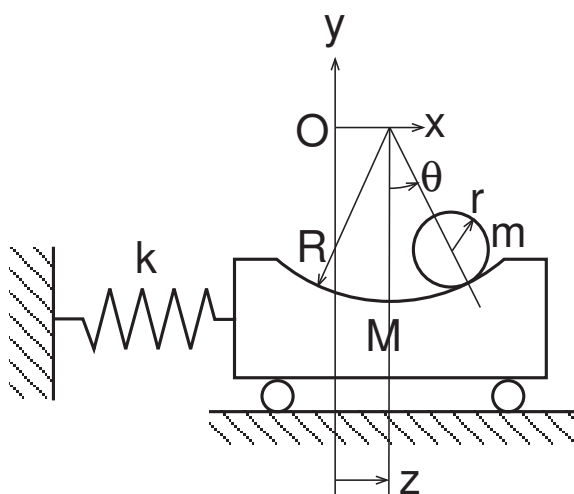


Fig. 1.9 転道振り子

すると、質点の座標 (x, y) は,

$$x = r \cos \omega t + \ell \cos(\omega t + \theta) \quad (1.86)$$

$$y = r \sin \omega t + \ell \sin(\omega t + \theta) \quad (1.87)$$

運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (1.88)$$

$$U = 0 \quad (1.89)$$

となり、式 (1.87), 式 (1.87) で座標変換すると、ラグランジアンは,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m \left\{ \omega r \sin \omega t + (\omega + \dot{\theta})\ell \sin(\omega t + \theta) \right\}^2 + \frac{1}{2}m \left\{ \omega r \cos \omega t + (\omega + \dot{\theta})\ell \cos(\omega t + \theta) \right\}^2 \quad (1.90)$$

したがって,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r \ell \omega \cos \theta + m \ell^2 (\omega + \dot{\theta}) \quad (1.91)$$

より,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = -m r \ell \omega \dot{\theta} \sin \theta + m \ell^2 \ddot{\theta} \quad (1.92)$$

また,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m r \ell \omega (\omega + \dot{\theta}) \sin \theta \quad (1.93)$$

これらをラグランジュの運動方程式に代入して、振り子の運動方程式を得る.

$$\ddot{\theta} + \frac{r \omega^2}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (1.94)$$

これを通常の振り子の運動方程式と比較すると、重力加速度 g のかわりに円心加速度 $r \omega^2$ が復元力の源になっていることがわかる.

[2] 並進系と回転系が連成しており一見複雑なので、ラグランジュの運動方程式から運動方程式を導く.

まず、平衡状態での円弧軌道の中心に絶対座標系 $O-xy$ の原点を設定し、一般化座標を (z, θ) と決める. また絶対座標系における円柱の回転角を φ とする.

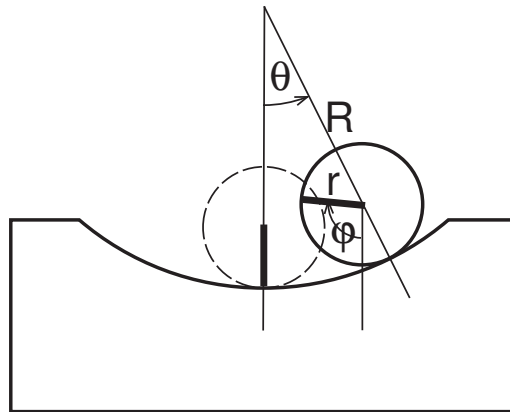


Fig. 1.10 円弧軌道上を滑らずに転がる円柱

すると、円柱の中心の座標 (x, y) は、

$$x = z + (R - r) \sin \theta \quad (1.95)$$

$$y = -(R - r) \cos \theta \quad (1.96)$$

また、円柱が滑らずに転がる条件（図 1.10 参照）から、

$$R\theta = r(\varphi + \theta) \quad (1.97)$$

よって、

$$\varphi = \frac{R - r}{r} \theta \quad (1.98)$$

運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは次のようになる。

$$T = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \quad (1.99)$$

$$U = \frac{1}{2} k z^2 + m g y \quad (1.100)$$

ここで、 I は円柱の中心周りの慣性モーメントであり、 $I = \frac{1}{2} m r^2$ である。上式の x, y, φ を式 (1.96), 式 (1.96), 式 (1.98) で一般化座標 (z, θ) に座標変換すると、ラグランジアンは、

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m \left\{ \dot{z} + (R - r) \dot{\theta} \cos \theta \right\}^2 + \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \\ &+ \frac{1}{2} I \left(\frac{R - r}{r} \right)^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k z^2 + m g (R - r) \cos \theta \end{aligned} \quad (1.101)$$

したがって、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = M \dot{z} + m \left\{ \dot{z} + (R - r) \dot{\theta} \cos \theta \right\} \quad (1.102)$$

より、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = (M + m) \ddot{z} + m(R - r) \ddot{\theta} \cos \theta - m(R - r) \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (1.103)$$

さらに、

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -kz \quad (1.104)$$

また、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(R - r) \dot{z} \cos \theta + m(R - r)^2 \dot{\theta} + I \left(\frac{R - r}{r} \right)^2 \dot{\theta} \quad (1.105)$$

より、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m(R - r) \ddot{z} \cos \theta - m(R - r) \dot{z} \dot{\theta} \sin \theta + \frac{3}{2} m(R - r)^2 \ddot{\theta} \quad (1.106)$$

さらに、

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m(R - r) \dot{z} \sin \theta - m g (R - r) \sin \theta \quad (1.107)$$

これらをラグランジュの運動方程式に代入して計算すると、次の運動方程式を得る。

$$(M + m) \ddot{z} + m(R - r) \ddot{\theta} \cos \theta - m(R - r) \dot{\theta}^2 \sin \theta + kz = 0 \quad (1.108)$$

$$m(R - r) \ddot{z} \cos \theta + \frac{3}{2} m(R - r)^2 \ddot{\theta} + m g (R - r) \sin \theta = 0 \quad (1.109)$$

特に、第 2 式は、次のように整理できる。

$$\ddot{z} \cos \theta + \frac{3}{2} (R - r) \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad (1.110)$$

平衡点まわりの微小振動を考えると、式 (1.108), 式 (1.109) を平衡点 $z = \theta = 0$ まわりで線形化して2次以上の項を省略すると、

$$(M + m)\ddot{z} + m(R - r)\ddot{\theta} + kz = 0 \quad (1.111)$$

$$m(R - r)\ddot{z} + \frac{3}{2}m(R - r)^2\ddot{\theta} + mg(R - r)\theta = 0 \quad (1.112)$$

を得る。行列形式で書くと、

$$\begin{bmatrix} M + m & m(R - r) \\ m(R - r) & \frac{3}{2}m(R - r)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mg(R - r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.113)$$

となり、慣性項を介して二つの一般化座標が連成していることがわかる。

第2章

多自由度系（2）：多自由度系の自由振動と強制振動

前回，線形多自由度系の運動方程式が一般に，

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (2.1)$$

の形に表されることを述べたが，このような一般的な系に対する自由振動や強制振動を考えていこう．機械力学Ⅱの繰り返しになるが，慣れの意味も込めて，まずは2自由度系の振動について調べ，次に N 自由度系に一般化する．

2.1 運動方程式

図 2.1 に示す2質点系の運動方程式は，次のようになる．

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1 \quad (2.2)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = f_2 \quad (2.3)$$

あるいは行列形式で書いて，

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

2.2 非減衰系の自由振動

2.2.1 特性方程式（振動数方程式）

まず，式 (2.4) から減衰項を取り去って減衰が作用しない（図 2.1 においてダッシュポットを取り去った）系の自由振動を考えてみよう．

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

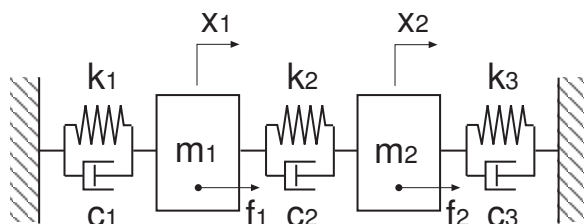


Fig. 2.1 2質点並進振動系

基本的な考え方は1自由度系のとときと全く同じである。まず、解を指数関数の形に仮定して運動方程式に代入し、特性方程式を導く。すなわち、

$$x_1 = X_1 e^{st} \quad (2.6)$$

$$x_2 = X_2 e^{st} \quad (2.7)$$

あるいは行列表記で、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} e^{st} \quad (2.8)$$

とおき、運動方程式 (2.5) に代入して e^{st} で割ると、

$$s^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

整理して、

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & m_2 s^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

これが自明でない解を持つためには、行列式が0でなければならない。

$$\begin{vmatrix} m_1 s^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & m_2 s^2 + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

よって、

$$(m_1 s^2 + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + k_2 + k_3) - k_2^2 = 0 \quad (2.12)$$

ここまでの流れを一般的な行列表記で書くと、解くべき運動方程式は、

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

解を

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} e^{st} \quad (2.14)$$

とおいて代入して e^{st} で割ると、

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K}) \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

非自明な解を持つためには、

$$|\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K}| = 0 \quad (2.16)$$

でなければならない。

式 (2.11), 式 (2.16) またはこれらを展開した式 (2.12) を**特性方程式**または**振動数方程式**という。今の場合、これは s に関する4次方程式であり、しかもよく見ると s^2 に関する2次方程式であることがわかる。一般に N 自由度系の場合、特性方程式は s に関する $2N$ 次方程式になり、特に非減衰の場合は s^2 に関する N 次方程式になる。

特性方程式 (2.12) を s^2 について解く。式 (2.12) を整理すると、

$$m_1 m_2 s^4 + \{m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)\} s^2 + (k_1 + k_3)k_2 + k_1 k_3 = 0 \quad (2.17)$$

解の出かたを調べるために判別式を計算すると、

$$(m_1 + m_2)^2 k_2^2 + 2(m_1 - m_2)(m_1 k_3 - m_2 k_1)k_2 + (m_1 k_3 - m_2 k_1)^2 \quad (2.18)$$

と k_2 についての2次式になり、さらにこの判別式を調べると負またはゼロであることがわかるから、式 (2.18) は正またはゼロ。ただし等号は $k_2 = 0$ かつ $k_1/m_1 = k_3/m_2$ のとき。したがって、この例外を除くと、式 (2.17) の解 s^2 は異なる負の実数になる。これを

$$s^2 = -\omega_1^2, -\omega_2^2 \quad (0 < \omega_1 < \omega_2) \quad (2.19)$$

とおくと、特性方程式の解、すなわち極として、

$$s = \pm i\omega_1, \pm i\omega_2 \quad (2.20)$$

を得る。極は純虚数となり、したがって、この系に生じうる自由振動は、虚部 ω_1, ω_2 を振動数とする振幅一定の単振動であることがわかる。

2.2.2 自由振動の一般解

さて、式 (2.10) が非自明な解を持つ条件から極が得られ、この系に生じうる自由振動は異なる振動数を持つ二種類の単振動であることがわかった。あとはこれらを重ね合わせたものが解となるはずだが、実は任意の振幅で各質点が振動できるわけではなく、おのおのの単振動において、二つの質点はある条件を満たすような振幅でしか振動できない。このあたりの事情を明らかにするために、次に式 (2.10) を振幅 X_1, X_2 について解いて、具体的な自由振動応答を求めよう。

ここで先ほど求めた s の値は式 (2.10) の行列式を 0 とする値であり、このとき式 (2.10) の行列はランクが落ちて実質的に一つの式になっている。そこで第 1 式だけ評価すると、

$$(m_1 s^2 + k_1 + k_2)X_1 - k_2 X_2 = 0, \quad s = \pm i\omega_1, \pm i\omega_2 \quad (2.21)$$

となる。仮に第 2 式だけを評価してもこれと等価な式が得られる。上式は X_1, X_2 平面上の原点を通る直線を表すが、この直線上の X_1, X_2 は全て解になる。したがって X_1, X_2 の比のみが決まることになり、この比、すなわち応答の振幅比は

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{-m_1 \omega_1^2 + k_1 + k_2}{k_2}, \frac{-m_1 \omega_2^2 + k_1 + k_2}{k_2} \quad (2.22)$$

これを ϕ_{12}, ϕ_{22} と書くと、結局、自由振動応答の一般解として、

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = X_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{12} \end{bmatrix} e^{i\omega_1 t} + X_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{12} \end{bmatrix} e^{-i\omega_1 t} + X_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{22} \end{bmatrix} e^{i\omega_2 t} + X_{14} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{22} \end{bmatrix} e^{-i\omega_2 t} \quad (2.23)$$

を得る。上式に含まれる四つの任意定数は初期条件から決定される。

1 自由度系の場合と同じく、 x_1, x_2 が実数であるためには、 X_{11} と X_{12} , X_{13} と X_{14} が互いに共役でなければならない。すなわち、 $X_{12} = \overline{X_{11}}$, $X_{14} = \overline{X_{13}}$. $X_{11} = \frac{1}{2}a_1 e^{i\varphi_1}$, $X_{13} = \frac{1}{2}a_2 e^{i\varphi_2}$ とおいてこれらの関係を考慮すると、

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{12} \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{22} \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (2.24)$$

となる。任意定数 $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$ は初期条件から決められる。さらに、 $\phi_1 = [1 \ \phi_{12}]^T$, $\phi_2 = [1 \ \phi_{22}]^T$ とおけば、

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^2 a_n \phi_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (2.25)$$

と整理して表すことができる。

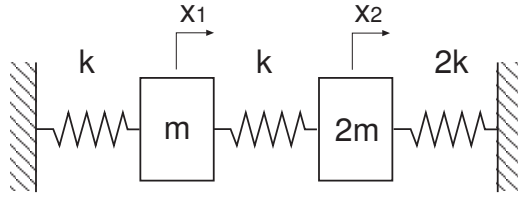


Fig. 2.2 2 質点系

例題：2 質点系

図 2.2 の 2 質点系の自由振動応答を求めよう．まず運動方程式は，

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

解を

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} e^{st} \quad (2.27)$$

とおき，運動方程式 (2.26) に代入して e^{st} で割ると，

$$\begin{bmatrix} ms^2 + 2k & -k \\ -k & 2ms^2 + 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

非自明な解を持つための条件として，特性方程式を得る．

$$\begin{vmatrix} ms^2 + 2k & -k \\ -k & 2ms^2 + 3k \end{vmatrix} = (ms^2 + 2k)(2ms^2 + 3k) - k^2 = 0 \quad (2.29)$$

これを s^2 について解いて，

$$s^2 = -\frac{k}{m}, -\frac{5k}{2m} \quad (2.30)$$

すなわち，自由振動の振動数（固有振動数（後述））は，

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{2m}} \quad (2.31)$$

式 (2.30) をそれぞれ式 (2.28) に代入して $[X_1, X_2]^T$ について解くと， X_1 と X_2 の比を得る．

$$s = i\omega_1 \quad \text{のとき} \quad \frac{X_2}{X_1} = 1 \quad (2.32)$$

$$s = i\omega_2 \quad \text{のとき} \quad \frac{X_2}{X_1} = -0.5 \quad (2.33)$$

特に $X_1 = 1$ と固定すると，モードシェイプベクトル（後述）を得る．

$$s = i\omega_1 \quad \text{のとき} \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$s = i\omega_2 \quad \text{のとき} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

以上より，この 2 質点系の自由振動の一般解は

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1) + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{\frac{5k}{2m}}t + \varphi_2) \quad (2.36)$$

となる．それぞれの標準振動（後述）のモードシェイプを図 2.3 に示す．

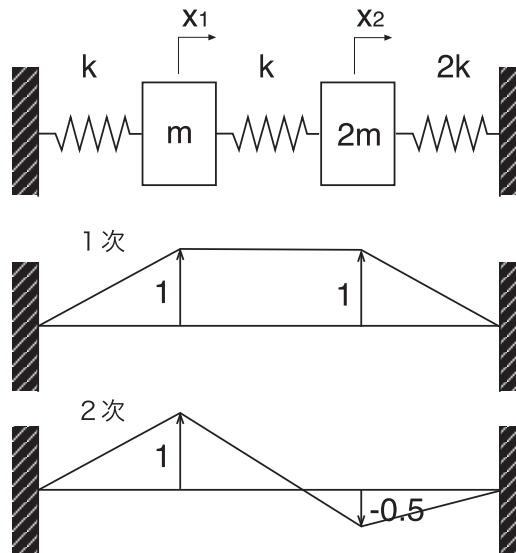


Fig. 2.3 図 2.2 の 2 質点系のモードシェイプ (ただし, 振動振幅を垂直方向に表示してある.)

2.2.3 自由振動の性質

ここまでで 2 自由度非減衰系の自由振動の一般解が導出できたわけだが, 導出の流れをまとめておく.

1. 運動方程式 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. 解を $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}e^{st}$ と仮定して運動方程式に代入.
3. 特性方程式 $|\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K}| = 0$ から極を求める.
4. それぞれの極について $(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K})\mathbf{X} = \mathbf{0}$ を解いて応答の振幅比を求める.
5. 得られた解を重ね合わせて一般解を得る.

得られた自由振動の一般解 (式 (2.25)) の性質と関連する用語をまとめよう.

- 自由振動は二つの単振動成分の重ね合わせである. この単振動それぞれを**規準振動**という.
- 規準振動の重ね合わせの混合比率は初期条件で決まる.
- それぞれの規準振動は振動数 ω_1, ω_2 を持つ. これらをこの系の**固有振動数**という. (1 自由度系で非減衰自由振動の振動数=固有振動数であったことを思い出そう.)
- それぞれの規準振動において, 各質点は ϕ_1, ϕ_2 で表される振幅比を持つ. 振幅「比」なので定数倍の自由度が残ることに注意. ここでは 1 番目の質点の振幅を 1 とすることで**規格化**している. ϕ_1, ϕ_2 は振動の「形」を規定するベクトルであり, **モードシェイプベクトル**と呼ばれる.
- つまり, それぞれの規準振動は, 固有振動数とモードシェイプベクトルで特徴づけられる. これらをまとめて**モーダルパラメータ**という.
- 規準振動のことを, **振動モード**と呼んだり**固有モード**と呼んだりする. 通常, 固有振動数の小さい方から 1 次モード, 2 次モードと呼ぶ.

ちなみに 1 自由度系では振幅比が意味を持たないので, 振動モードという概念がなかった. 2 自由度以上になって空間的な広がりが出てはじめて振動モードという概念が出現する.

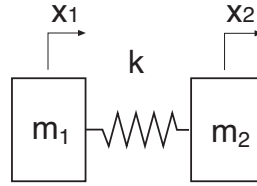


Fig. 2.4 剛体モードを持つ2質点系

この段階で、以上のことを N 自由度系に拡張してまとめておこう。上で扱った2質点系では二つの振動モードが得られたが、一般に N 自由度系では N 個の振動モードが得られる。解き方は2自由度系と全く同じである。

1. 運動方程式 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. 解を $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}e^{st}$ と仮定して運動方程式に代入。
3. 特性方程式 $|\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K}| = 0$ から極を求める。
4. それぞれの極について $(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K})\mathbf{X} = \mathbf{0}$ を解いて応答の振幅比を求める。
5. 得られた解を重ね合わせて一般解を得る。

行列のサイズが N 行 N 列なので、3. の特性方程式は s^2 に関する N 次方程式になり、 N 個の s^2 が求まる。証明は省くが、通常の振動系においてはこれらはいずれも負の実数となる。そこでこれらを

$$s^2 = -\omega_1^2, -\omega_2^2, \dots, -\omega_N^2 \quad (2.37)$$

とおくと、極は $2N$ 個求まって、

$$s = \pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \dots, \pm i\omega_N \quad (2.38)$$

なる N 組の複素共役な純虚数対となる。したがって、 N 自由度系の自由振動の一般解は N 個の単振動の重ね合わせになる。

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (2.39)$$

n 番目の単振動は、振動数 ω_n と振幅比 ϕ_n を持つ。2自由度系の場合と同様に、この単振動を n 次モードの**規準振動**といい、 ω_n を n 次の**固有振動数**、 ϕ_n を n 次の**モードシェイプベクトル**と呼ぶ。 n は通常、固有振動数の小さい順に通し番号を付ける。

規準振動の振幅 a_n と初期位相 φ_n ($n = 1, \dots, N$) は初期条件から定められる。その一般的な方法については次章で述べる。

2.2.4 剛体モードを持つ系

2.2.1 節で考えた系 (図 2.1 の系からダッシュポットを取り去ったもの) から両端のバネを取り外した系 (図 2.4) を考えよう。バネで連結された二つの質点が宇宙空間に浮かんた様を想像してもらえればよい。運動方程式は、

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

これまでと同様の手順で特性方程式を求めると、

$$s^2 \{m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)k\} = 0 \quad (2.41)$$

となり, $s^2 = 0, -(m_1+m_2)k/(m_1m_2)$, すなわち 4つの極のうち 2つが $s = 0$ になる. このとき, $(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K}) \mathbf{X} = \mathbf{0}$ は,

$$\mathbf{KX} = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

上式を満たす非自明な $\mathbf{X}$ の集合は行列 $\mathbf{K}$ の行ベクトルに直交するベクトルの集合であり, 数学的には行列 $\mathbf{K}$ の **零空間**と呼ばれる 2次元ベクトル空間の部分空間になる. 明らかに, 行列 $\mathbf{K}$ の行ベクトルが 1 次従属のとき, そのようなベクトル空間が存在する.

上式を満たす非零のベクトルに対して, 系の復元力はゼロになる. すなわち, 系は弾性変形せずに運動する. つまりこれは, 系が一つの剛体として振る舞うことを意味している. これを**剛体モード**という. 具体的に上式を満たすベクトルを求めると, $X_1 = X_2$, すなわち, $\phi_1 = [1, 1]^T$ である. これは 2つの質点が全く同じだけ変位することを表しており, このときばねは全く変形せず, この系は全体が一つの剛体としてふるまう.

もう一つのモードは, $s^2 = (m_1+m_2)k/(m_1m_2)$ のときであり, 対応するモードシェイプベクトルは, $[1, -m_1/m_2]$ となる. これは 2つの質点が逆位相で動く (互いに近づいたり遠ざかったりする) ことを示している. この系の一般の運動はこのモードに剛体モードの動きを重ね合わせたものになる.

2.3 減衰系の自由振動

減衰が存在する場合も考え方は同じであるが, 現象はずっと複雑になる. 運動方程式は,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.43)$$

これに対して以下の手順で自由振動の一般解を求めることができる.

1. 解を $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}e^{st}$ と仮定して運動方程式に代入.
2. 特性方程式 $|\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}| = 0$ から極を求める.
3. それぞれの極について $(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}) \mathbf{X} = \mathbf{0}$ を解いて応答の振幅比を求める.
4. 得られた解を重ね合わせて一般解を得る.

ここでステップ 2において, 非減衰の場合と同様に特性方程式は s に関する 4 次方程式になるが, 今度は s の 1 次や 3 次の項も出てくる. したがって一般にはこれを解析的に解くことは現実的でない. そこで以下では形式的に話を進める. まず s に関する 4 次式を二つの 2 次式の積に因数分解すると, 特性方程式は,

$$(s^2 + \alpha_1 s + \beta_1)(s^2 + \alpha_2 s + \beta_2) = 0 \quad (2.44)$$

の形になる. したがって二つの 2 次方程式を解けばよいことになり, それぞれについては 1 自由度系の場合と全く同じように係数の値によって, 異なる実数解, 重解, 1 対の共役複素数解, 1 対の共役な純虚数解のいずれかが得られる. それぞれの極の出かたに対応する自由振動が, 過減衰, 臨界減衰, 減衰振動, 単振動になるのも 1 自由度系の場合と同じである.

次にステップ 3 で振幅比を求めるが, 極が 1 対の共役複素数 $s = -\sigma_n \pm i\omega_n$ の場合, すなわち減衰自由振動解の場合には, 対応する振幅比も一般に 1 対の共役複素数である. これを $[1 \ r_n e^{i\gamma_n}]^T, [1 \ r_n e^{-i\gamma_n}]^T$ とおくと, 規準振動は,

$$e^{-\sigma_n t} \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ r_n e^{i\gamma_n} \end{bmatrix} e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} \right\} = e^{-\sigma_n t} \text{Re} \begin{bmatrix} e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} \\ r_n e^{i(\omega_n t + \varphi_n + \gamma_n)} \end{bmatrix} = e^{-\sigma_n t} \begin{bmatrix} \cos(\omega_n t + \varphi_n) \\ r_n \cos(\omega_n t + \varphi_n + \gamma_n) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

となり, 各質点が決まった振幅比と位相差を持ちながら減衰振動する応答となる.

2.4 減衰系の強制振動

基本的には1自由度系と同じ方針でいくが、運動方程式が

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (2.46)$$

のように行列になる分、複雑度が増す。

2.4.1 定常応答

各質点に調和外力が作用するとしてこれに対する定常応答を求めよう。手順は1自由度系の場合と同様で、次のようになる。

1. 外力と応答が同じ振動数 ω で調和振動するとして複素数表示で表し、運動方程式に代入。
2. 応答振幅（複素振幅）について解く。

まず、外力を複素数表示で

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \mathbf{F} e^{i\omega t} \quad (2.47)$$

と表す。 F_1, F_2 は複素振幅であり、絶対値が振動振幅を、偏角が初期位相や二つの外力間の位相差を表現する。この調和外力に対する定常応答を

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \mathbf{X} e^{i\omega t} \quad (2.48)$$

とにおいて、運動方程式 (2.46) に代入して $e^{i\omega t}$ で割ると、

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (2.49)$$

これより

$$\mathbf{X} = (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F} \quad (2.50)$$

となる。1質点系の場合と同じく、これを

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}_f(\omega) \mathbf{F} \quad (2.51)$$

と書いて、 $\mathbf{G}_f(\omega)$ を周波数応答関数行列という。ただし、

$$\mathbf{G}_f(\omega) = (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \quad (2.52)$$

である。行列の各要素の絶対値と偏角が外力と応答の振幅比、位相差を表す点も1自由度系の場合と同様である。

2.4.2 過渡応答

各質点に任意の外力が作用するとしてこれに対する過渡応答を求めよう。手順は1自由度系の場合と同様で、次のようになる。

1. 運動方程式をラプラス変換。
2. 応答のラプラス変換について解く。
3. 逆ラプラス変換して時間波形を求める。

簡単のため、初期変位、初期速度が全てゼロの場合を考える。まず運動方程式をラプラス変換して、

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}) \mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (2.53)$$

$\mathbf{X}(s)$ について解くと、

$$\mathbf{X}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F}(s) \quad (2.54)$$

となる。ここで

$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1} \quad (2.55)$$

とおくと、

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{F}(s) \quad (2.56)$$

となる。 $\mathbf{G}(s)$ はこの系における外力から変位応答への**伝達関数（コンプライアンス）行列**である。 $s = i\omega$ とすると定常応答の周波数応答関数行列 $\mathbf{G}_f(\omega)$ が得られるのは 1 自由度系の場合と同じである。

最後に式 (2.56) を逆ラプラス変換すると、変位応答波形を求めることができる。ただしこのようにして応答が求められるのは 3 自由度系程度までが限界であり（逆行列計算を必要とするため）、それ以上の多自由度系では現実的でない。そのような場合には次回に述べる**モード解析法**を用いるのが通常である。

2.5 エネルギー収支の式と特性行列の正定性

1 質点系において、運動方程式を変位について積分することによって、エネルギーの収支を表す式が得られたことを思いだそう。多自由度系についても同様の式を導けるだろうか。

運動方程式は力の釣り合いの式である。すなわち、 N 自由度系の運動方程式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (2.57)$$

の各項は N 次元の力のベクトルであり、これと微小変位 $d\mathbf{x}$ の内積をとって積分したものが、この力がなした仕事になる。 $d\mathbf{x}^T \mathbf{f} = \mathbf{f}^T d\mathbf{x}$ などと書けることに注意すると、

$$\int \ddot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} d\mathbf{x} + \int \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} d\mathbf{x} + \int \mathbf{x}^T \mathbf{K} d\mathbf{x} = \int \mathbf{f}^T d\mathbf{x} + E_0 \quad (2.58)$$

積分変数を変換して、

$$\int \ddot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} dt + \int \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} dt + \int \mathbf{x}^T \mathbf{K} d\mathbf{x} = \int \mathbf{f}^T d\mathbf{x} + E_0 \quad (2.59)$$

積分を実行すると、

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \int \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} dt + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \int \mathbf{f}^T d\mathbf{x} + E_0 \quad (2.60)$$

上式の各項はいずれもエネルギーの次元を持つ量であり、左から、運動エネルギー (T)、散逸エネルギー (D)、弾性エネルギー (U)、外力が系に与える仕事 (W)、初期エネルギーである。力学的エネルギーを左辺にまとめると、

$$T + U = E_0 - D + W \quad (2.61)$$

となり、エネルギー収支を表す。

さて、ここで、各項の物理的意味を考えると、任意のゼロでない運動（すなわち、任意の $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ ）に対して、

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} > 0 \quad (2.62)$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \geq 0 \quad (2.63)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} \geq 0 \quad (2.64)$$

が成り立っていなければならない。式 (2.63) と式 (2.64) に等号が付いているのは、剛体モードの場合を考慮していることである。式 (2.62)～式 (2.64) の左辺に含まれるような、行列を右と左から同じベクトルで挟んだ積（スカラー量になる）を **2次形式**といい、ある行列について、任意の非ゼロなベクトルに対する2次形式が正であるとき、行列は**正定**、任意の非ゼロなベクトルに対する2次形式が正またはゼロであるとき、行列は**準正定**であるという。エネルギーに対する式 (2.62)～式 (2.64) の物理的要件は、質量行列が正定であること、剛性および減衰行列が準正定であることを示している。

第3章

多自由度系（3）：モード解析

多自由度系の最終回は、多自由度系の振動を1自由度系の振動に帰着して考える「モード解析」の考え方について述べる。このやり方では、まず運動方程式を解析しやすい1自由度系の形に書き換えてしまうので、自由振動・強制振動ともに1自由度系の解析方法が利用でき、複雑な行列計算を必要としないという著しい利点がある。

3.1 運動方程式の非連成化という発想

この章では N 自由度系の運動方程式の一般形

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.1)$$

から出発する。 $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ は N 次実対称行列である。これらは一般に0でない非対角項を持ち、それゆえ N 個の座標 $x_1, \dots, x_N$ で表される振動は**連成**する。しかし、もし、 $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ が全て対角行列だったらどうだろう。その場合は、 N 個の座標 $x_1, \dots, x_N$ に関する運動方程式は互いに独立になる。つまり N 個のバラバラな（互いに連成しない）1自由度系であり、個別に解くことができる。

そこで、運動方程式 (3.1) を何とかして**非連成化**することを考えてみよう。そのために正則な N 次正方行列 $\mathbf{A}$ による座標変換 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t)$ を考える。これを運動方程式 (3.1) に代入して、

$$\mathbf{M}\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.2)$$

左から $\mathbf{A}^T$ をかけると、

$$\mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{q}(t) = \mathbf{A}^T\mathbf{f}(t) \quad (3.3)$$

これが新しい座標系 $\mathbf{q}$ における運動方程式である。ここでもし、 $\mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{A}$ が全て対角行列になるような変換行列 $\mathbf{A}$ が見つければ、上で述べたような運動方程式の非連成化が実現できる。実はそのような座標変換は、少なくとも非減衰の場合は常に見つかるのであって、そのための準備となるのが次に述べる「固有値問題」である。

3.2 固有値問題

たいていの教科書では、まず N 自由度系の自由振動の解を求める作業を行い、その過程で固有値問題に言及するのだが、ここではまずは天下り式にこれを導入する。

運動方程式 (3.1) に対して次の**固有値問題**を考える。

$$\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi \quad (3.4)$$

これを解くと N 個の固有値 λ_n ($n = 1, \dots, N$) と、対応する N 個の固有ベクトル ϕ_n ($n = 1, \dots, N$) が得られる。すなわち、

$$\mathbf{K}\phi_n = \lambda_n \mathbf{M}\phi_n \quad (n = 1, \dots, N) \quad (3.5)$$

- 固有値問題の式 (3.4) は、標準的な行列の固有値問題の式 $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ とは異なる形をしており（もし $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ なら標準的な固有値問題の形になる）、**一般固有値問題**と呼ばれる。
- 実は、一般固有値問題の式 (3.4) の解き方をわれわれは既に知っている。式 (3.4) は非減衰 N 自由度系の自由振動

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

を解く際に遭遇するものと同一である。すなわち上式で $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}e^{st}$ とおくと、

$$s^2 \mathbf{M}\mathbf{X} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

上式で $s^2 = -\lambda$ とすれば式 (3.4) と同じ形になり、式 (2.37) より $s^2 = -\omega_1^2, \dots, -\omega_N^2$ と書けたことから、 n 番目の固有値は λ_n は n 次固有振動数の 2 乗 ω_n^2 である。また、対応する固有ベクトル ϕ_n は n 次モードシェイプベクトルそのものである。すなわち、

$$\mathbf{K}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{M}\phi_n \quad (n = 1, \dots, N) \quad (3.8)$$

と書ける。

- ちなみに、一般固有値問題の式 (3.4) をそのまま解くと以下のとおり：

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\phi = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

と変形して、非自明な解を持つ条件

$$|\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}| = 0 \quad (3.10)$$

から固有値 λ_n ($n = 1, \dots, N$) が求まる（証明は省くが通常の振動系では固有値はすべて正になる）。さらに固有値を式 (3.9) に代入して ϕ について解くと固有ベクトル ϕ_n ($n = 1, \dots, N$) が得られる。ただし個々の固有ベクトルは定数倍の任意性を有するので、大きさを決める際には何らかの**規格化条件**が必要である（たとえば「一つ目の要素を 1 とする」など）。やはり以上のプロセスは非減衰 N 自由度系の自由振動を解くプロセスと本質的に同じであることが確認できるだろう。

- N が大きい場合には実際には数値解法によって計算する。効率がよく信頼性の高い数値計算アルゴリズムが確立しているので、これらを実装した数値計算ライブラリを利用する。

3.3 モードシェイプの直交性

実はこのようにして求めたモードシェイプベクトルが、3.1 で述べた特別な座標変換行列 $\mathbf{A}$ を与えるのである。そのことを明らかにするために、次に、モードシェイプベクトルの「直交性」について説明しよう。

まず、 m 次の固有振動数とモードシェイプ、および n 次の固有振動数とモードシェイプを考える。式 (3.8) より、

$$\mathbf{K}\phi_m = \omega_m^2 \mathbf{M}\phi_m \quad (3.11)$$

$$\mathbf{K}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{M}\phi_n \quad (3.12)$$

まず式 (3.11) に左から ϕ_n^T をかけると、

$$\phi_n^T \mathbf{K}\phi_m = \omega_m^2 \phi_n^T \mathbf{M}\phi_m \quad (3.13)$$

次に式 (3.12) に左から ϕ_m^T をかけて両辺の転置をとると,

$$\left(\phi_m^T \mathbf{K} \phi_n\right)^T = \omega_n^2 \left(\phi_m^T \mathbf{M} \phi_n\right)^T \quad (3.14)$$

$\mathbf{K}$ と $\mathbf{M}$ が対称であることを考慮すると,

$$\phi_n^T \mathbf{K} \phi_m = \omega_n^2 \phi_n^T \mathbf{M} \phi_m \quad (3.15)$$

式 (3.13) と式 (3.15) を辺々引くと,

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \phi_n^T \mathbf{M} \phi_m = 0 \quad (3.16)$$

まず $m \neq n$ のとき, 特殊な場合を除いて $\omega_m \neq \omega_n$ である. 特殊な場合とは, 異なる次数のモードの固有振動数が一致する場合で, 対象物が幾何学的対称性を有する場合などに発生しうる. これをモードの**縮退**とよび特別な扱いが必要であるが, ここではそのような場合を除外して考える. すると上式より

$$\phi_n^T \mathbf{M} \phi_m = 0 \quad (3.17)$$

である. またこのとき, 式 (3.13) より,

$$\phi_n^T \mathbf{K} \phi_m = 0 \quad (3.18)$$

が成立する. 次に $m \neq n$ のときは, $\phi_n^T \mathbf{M} \phi_n$ は 0 ではない正值となる. これを

$$\phi_n^T \mathbf{M} \phi_n = \bar{m}_n \quad (3.19)$$

と書くと, 式 (3.13) より,

$$\phi_n^T \mathbf{K} \phi_n = \omega_n^2 \bar{m}_n \quad (3.20)$$

となって, $\omega_n = 0$ となる剛体モードの場合まで含めると, $\phi_n^T \mathbf{K} \phi_n$ はゼロまたは正の値となる. そこでこれを $\bar{k}_n$ と書くと,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\bar{k}_n}{\bar{m}_n}} \quad (3.21)$$

なる関係が成立することがわかる. これは 1 自由度系の固有振動数と質量, ばね定数の関係に類似していることに注意せよ.

クロネッカのデルタ ($\delta_{mn} = 0$ if $m \neq n$, 1 if $m = n$) を導入すると, 式 (3.17)~式 (3.20) は次のようにまとめて書ける.

$$\phi_m^T \mathbf{M} \phi_n = \bar{m}_n \delta_{mn} \quad (3.22)$$

$$\phi_m^T \mathbf{K} \phi_n = \bar{k}_n \delta_{mn} \quad (3.23)$$

式 (3.22), 式 (3.23) の性質をモードシェイプベクトルの**直交性**という. また, $\bar{m}_n, \bar{k}_n$ を n 次の**モード質量**, n 次の**モード剛性**という.

前述のようにモードシェイプベクトルを一意に決めるためには何らかの正規化条件が必要だが, 特にモード質量が全て 1 になるように決めたとき, そのようなモードシェイプを**正規モードシェイプ**と呼ぶ.

以上の関係を行列形式で書いておこう. まず $\phi_1, \dots, \phi_N$ を横に並べて N 次正方行列を作る.

$$\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_N] \quad (3.24)$$

この行列 (**モード行列**) は必ず正則になることが知られている. この表記を用いると, モードシェイプの直交性の式 (3.22) および式 (3.23) は次のように表せる.

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{m}_N \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{k}_N \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

特に、正規モードシェイプのときは、

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (3.27)$$

である。

最後に、上の行列表記を用いて、モードシェイプベクトルの直交性を再度示しておこう。式 (3.24) の行列を用いると、一般固有値問題の N 個の解の式 (3.8) は一気に

$$\mathbf{K} \Phi = \mathbf{M} \Phi \Lambda \quad (3.28)$$

と書ける。ここで Λ は

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

なる対角行列である。式 (3.28) の両辺に左から Φ^T をかけると、

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \Lambda \quad (3.30)$$

両辺の転置をとって、特性行列 $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ および Λ の対称性を考慮すると、

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad (3.31)$$

式 (3.30), 式 (3.31) より、

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \Lambda = \Lambda \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad (3.32)$$

Λ の対角要素が全て異なるとすると、すなわち、固有振動数が互いに異なるとすると、この式が成立するためには、 $\Phi^T \mathbf{M} \Phi$ が対角行列でなければならない。 $\Phi^T \mathbf{M} \Phi$ が対角行列ならば、式 (3.30) より $\Phi^T \mathbf{K} \Phi$ も対角行列でなければならない。そこで $\Phi^T \mathbf{M} \Phi$, $\Phi^T \mathbf{K} \Phi$ の対角要素をそれぞれモード質量、モード剛性と定義すると、式 (3.25), 式 (3.26) を得る。

3.4 運動方程式の非連成化（非減衰の場合）

さて、以上で準備は整った。何をするかといえば、要は 3.1 で述べた $\mathbf{A}$ として Φ を使う。つまり、

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n \xi_n(t) \quad (3.33)$$

とおくのである。この表現を**モード展開**という。また上式で導入した新しい座標 $\boldsymbol{\xi}(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)]^T$ を**規準座標**または**モード座標**という。これと対比する意味で、元の $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_N(t)]^T$ を**物理座標**という。

これを運動方程式 (3.1) に代入して左から Φ^T をかけると、

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\boldsymbol{\xi}}(t) + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \boldsymbol{\xi}(t) = \Phi^T \mathbf{f}(t) \quad (3.34)$$

よって $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ なる非減衰系では、モードシェイプの直交性の式 (3.25) および式 (3.26) より、

$$\begin{bmatrix} \bar{m}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{m}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{k}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^T \mathbf{f} \\ \vdots \\ \phi_N^T \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

となり、運動方程式が互いに独立な N 個の式になる。すなわち、

$$\bar{m}_n \ddot{\xi}_n(t) + \bar{k}_n \xi_n(t) = \bar{f}_n(t) \quad (n = 1, \dots, N) \quad (3.36)$$

ただし $\bar{f}_n = \phi_n^T \mathbf{f}$ とおいた。または両辺を $\bar{m}_n$ で割って

$$\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) = \frac{1}{\bar{m}_n} \bar{f}_n(t) \quad (n = 1, \dots, N) \quad (3.37)$$

これらは固有振動数 ω_n を持つ、互いに独立な N 個の 1 自由度系の運動方程式である。

特に、正規モードシェイプを用いた場合は、式 (3.35) は、

$$\begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \omega_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^T \mathbf{f} \\ \vdots \\ \phi_N^T \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

となり、各規準座標の運動方程式は、

$$\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) = \bar{f}_n(t) \quad (n = 1, \dots, N) \quad (3.39)$$

となる。

以上のように、規準座標系では、システムのダイナミクスが非連成化されて、1 自由度の運動方程式で記述される。これらの運動方程式は、単なる 1 自由度系なので、第 1 章や第 2 章で述べた各種の手法により、自由振動だろうと、定常応答だろうと、一般的な強制力による過渡振動だろうと、自由自在に解くことができる。

3.5 減衰が存在する場合（比例減衰の場合）

減衰が存在する場合、式 (3.34) の左辺第 2 項の行列部分 $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ は一般には残念ながら対角にならない。そこでここでは次のようなケースを考えよう。すなわち減衰行列 $\mathbf{C}$ が次の形で表される場合を考える。

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (3.40)$$

このようなタイプの減衰を**比例減衰**という。上の仮定は一見とても乱暴に思えるが、減衰が小さい系の場合、実用上十分である場合が多い。

このとき式 (3.34) の左辺第 2 項の行列部分は

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \alpha \Phi^T \mathbf{M} \Phi + \beta \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \begin{bmatrix} \alpha \bar{m}_1 + \beta \bar{k}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \bar{m}_N + \beta \bar{k}_N \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

と対角行列になる。対角項を $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_N$ と置き直せば、元の運動方程式はモード座標系で

$$\bar{m}_n \ddot{\xi}_n(t) + \bar{c}_n \dot{\xi}_n(t) + \bar{k}_n \xi_n(t) = \bar{f}_n(t) \quad (n = 1, \dots, N) \quad (3.42)$$

または

$$\ddot{\xi}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) = \frac{1}{\bar{m}_n} \bar{f}_n(t) \quad (n = 1, \dots, N) \quad (3.43)$$

と非連成化され、固有振動数 ω_n 、減衰比 ζ_n を持つ 1 自由度系の運動方程式に帰着する。ここで

$$\zeta_n = \frac{\bar{c}_n}{2\sqrt{\bar{m}_n \bar{k}_n}} \quad (3.44)$$

を**モード減衰比**と呼ぶ。

減衰行列を質量行列と剛性行列の線形和で表現することの妥当性についてコメントしておく。まず、式 (3.40) 右辺第 1 項の質量行列に比例する成分は、たとえば、外部流体の抵抗（空気抵抗など）や固定面との間の摩擦など、振動系の質量要素と外部の固定点との間に作用する減衰力を表すことを意図している。質量行列に比例するということは、質量の大きな部分には大きな抵抗力が働くことを意味しているわけで、あながち無茶な考えというわけでもないだろう。次に、式 (3.40) 右辺第 2 項の剛性行列に比例する成分は、おもに、材料の内部減衰や締結部の摩擦などを表現することを意図したものである。剛性行列に比例するということは、バネ要素に並列に減衰要素が入っていることを意味しており、こちらもそれなりに納得できるだろう。

ところで、比例減衰の仮定だけでも何だか胡散臭いのには、係数 α, β の値などといったどのように決めたらいいのか、疑問に思った読者もいるだろう。実は、これらの値はむしろ実際の振動応答に合致するように決めるのである。

そもそも一般に、ばね定数や減衰係数などの物理パラメータを設計段階で正確に見積もることは困難を伴う。特に減衰の正確な予測は、大変に難しい。もちろん、たとえばオイルダンパを設計したとして、シリンダ内のオイルの流動に伴う粘性抵抗を計算することは可能である。そのような、明示的、集中的な減衰要素の見積もりは不可能ではないのだが、問題は、明示的な減衰要素がない場合である。一般に機械や構造物の減衰は、材料の内部減衰、締結部における摩擦、軸受における粘性抵抗や摩擦など多彩な減衰機構に由来している。振動系のモデル化をする際に粘性減衰（ダッシュポット）を入れてきたが、多くの場合、これはそれら多彩な減衰機構の集積を模式的に表現したものなのである。このような場合、それらの減衰機構の一つ一つを正確に理解し定量化したうえで、それらの集積としての粘性減衰係数を正確に見積もるというアプローチは現実的でない（あるいは不可能である）。

そこで、正攻法をあきらめて、減衰を式 (3.40) の形で仮定してしまおう、というのが比例減衰である。これならば、決定すべきパラメータは二つだけであるし、運動方程式が非減衰のモードシェイプベクトルを使って対角化できるというメリットもある。パラメータ α, β は、実験により振動応答を計測し、これに整合するように決めるというアプローチが取られる。このように、システムの応答に関する情報からシステムの内包するパラメータを推定する作業を**システム同定**という。

3.6 モード解析

以上のように、モードシェイプを使った座標変換によって運動方程式を非連成化して 1 自由度系に帰着した上で解析する方法を**モード解析**という。モード解析の手順を以下にまとめる：

1. 一般固有値問題 $\mathbf{K}\phi = \omega^2\mathbf{M}\phi$ を解く。
2. 得られたモードシェイプを使って座標変換を施し、運動方程式を非連成化する。
3. 個々の 1 自由度運動方程式を個別に解く。
4. 得られた解を使って、物理座標系での解 $\mathbf{x}(t) = \Phi\boldsymbol{\xi}(t)$ を求める。

モード解析では、運動方程式を解く前にまず非連成化してしまうので、解くべき式は 1 自由度系の運動方程式と同じであり、前章で行ったような逆行行列計算を必要とせず、解を求める作業が著しく簡単になる。また、「多自由度系であっても、モード毎に分解して見れば 1 自由度系として理解できる」あるいは「どんなに複雑な多自由度系であっても 1 自由度系の重ね合わせと見なすことができる」という視点は、複雑な振動系の理解を助ける強力なツールになる。

さらに、この視点を逆に活用すると、複雑な振動系の運動方程式を「実験的に」求めることができる。すなわち、モード解析では物理座標系における運動方程式から規準座標系における運動方程式を導いたわけだが、逆に、モード展開表現（式 (3.33)）と規準座標系での運動方程式 (3.43) から出発してシステムのダイナミクスを表現してもよいわけである。ただしこれらの式は、モード質量、固有振動数、モード減衰比といったモーダルパラメー

タを係数として持つので、何らかの実験によってこれらのパラメータを決定する必要がある。これは先に述べたシステム同定の一種であり、これらのパラメータを同定する作業を**実験モード解析**または**モード同定**と呼ぶ。

3.7 自由振動応答 *

前章で見たように N 自由度系の自由振動一般解は $2N$ 個の定数を含むが、これらを初期条件から求める手法については説明していなかった。実はこれらの定数はモードの直交性を用いて簡単に求めることができる。

自由振動系の初期変位を $\mathbf{x}_0$ 、初期速度を $\mathbf{v}_0$ としよう。自由振動問題の解

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^N a_n \boldsymbol{\phi}_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (3.45)$$

において $t = 0$ とすると、

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{n=1}^N a_n \boldsymbol{\phi}_n \cos \varphi_n \quad (3.46)$$

さらに式 (3.45) を時間微分して $t = 0$ とすると

$$\mathbf{v}_0 = - \sum_{n=1}^N a_n \omega_n \boldsymbol{\phi}_n \sin \varphi_n \quad (3.47)$$

を得る。式 (3.46) と式 (3.47) から $a_n \cos \varphi_n$, $a_n \sin \varphi_n$ に関する連立 1 次方程式を導きこれを解くと、 a_n , φ_n を求めることができるが、逆行列の計算が面倒である。

ここで、式 (3.46) と式 (3.47) の両辺に左から $\boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{M}$ をかける。

$$\boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 = \sum_{n=1}^N a_n \boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n \cos \varphi_n \quad (3.48)$$

$$\boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{M} \mathbf{v}_0 = - \sum_{n=1}^N a_n \omega_n \boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n \sin \varphi_n \quad (3.49)$$

すると、モードの直交性の式

$$\boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n = \bar{m}_m \delta_{mn} \quad (3.50)$$

$$\boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n = \bar{k}_m \delta_{mn} \quad (3.51)$$

より (δ_{mn} はクロネッカのデルタ)、直ちに、

$$\boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 = a_m \bar{m}_m \cos \varphi_m \quad (3.52)$$

$$\boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{M} \mathbf{v}_0 = -a_m \bar{k}_m \sin \varphi_m \quad (3.53)$$

となり、これから簡単に a_n , φ_n を求めることができる。

3.8 伝達関数・共振曲線・単位インパルス応答

今まで何度も述べているように、与えられた系の動的な性質を知るためには、調和加振に対する定常応答の共振曲線（つまり周波数応答関数）、伝達関数、単位インパルス応答などを調べればよい。たとえば周波数応答関数は伝達関数で $s = i\omega$ とすれば得られるし、伝達関数を逆ラプラス変換すれば単位インパルス応答が得られるなど、これらの量は互に関連している。またこれらの量を用いると、時間領域、ラプラス変換領域、周波数領域で外力に対する系の応答を求めることができる。図 3.1 にこれらの関係をまとめて示すので、しっかりとイメージを掴んでいただきたい。

この章の最後に、 N 自由度系の外力から変位への伝達関数と共振曲線および単位インパルス応答をモード解析に基づいて求めよう。(ただし比例減衰の仮定が成り立つとする。) 前節での手順に従い、まず一般固有値問題を解いて N 個の固有振動数と、対応するモードシェイプベクトルを求めたとする。するとこの系のダイナミクスは式 (3.33) のモード展開表現とモード座標系での運動方程式 (3.43) を組み合わせて、次のように書くことができる。

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n \xi_n(t) \quad (3.54)$$

$$\ddot{\xi}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{\xi}_n(t) + \omega_n^2\xi_n(t) = \frac{1}{\bar{m}_n}\phi_n^T\mathbf{f}(t) \quad (n = 1, \dots, N) \quad (3.55)$$

それでは、まず伝達関数を求めてみよう。式 (3.54) と式 (3.55) を初期値を全て 0 と仮定してラプラス変換すると、

$$\mathbf{X}(s) = \sum_{n=1}^N \phi_n \Xi_n(s) \quad (3.56)$$

$$\{s^2 + 2\zeta_n\omega_n s + \omega_n^2\} \Xi_n(s) = \frac{1}{\bar{m}_n}\phi_n^T\mathbf{F}(s) \quad (3.57)$$

を得る。式 (3.57) を $\Xi_n(s)$ について解くと、

$$\Xi_n(s) = \frac{\frac{1}{\bar{m}_n}\phi_n^T}{s^2 + 2\zeta_n\omega_n s + \omega_n^2}\mathbf{F}(s) \quad (3.58)$$

これを式 (3.56) に代入すると、

$$\mathbf{X}(s) = \sum_{n=1}^N \frac{\frac{1}{\bar{m}_n}\phi_n\phi_n^T}{s^2 + 2\zeta_n\omega_n s + \omega_n^2}\mathbf{F}(s) \quad (3.59)$$

となる。したがって、外力から変位応答への**伝達関数（コンプライアンス）行列**は、次式のように求められる。

$$\mathbf{G}(s) = \sum_{n=1}^N \frac{\frac{1}{\bar{m}_n}\phi_n\phi_n^T}{s^2 + 2\zeta_n\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.60)$$

あるいは固有振動数と減衰比の代わりにモード質量、モード減衰係数、モード剛性を用いて表すと、

$$\mathbf{G}(s) = \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n\phi_n^T}{\bar{m}_n s^2 + \bar{c}_n s + \bar{k}_n} \quad (3.61)$$

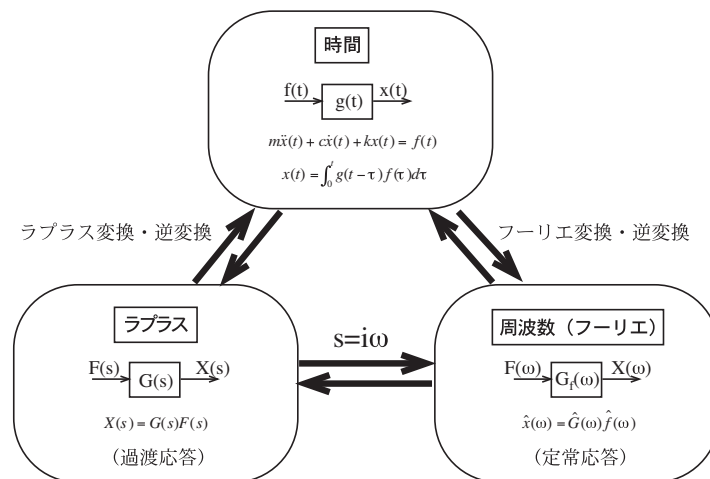


Fig. 3.1 系のダイナミクスの様々な表現

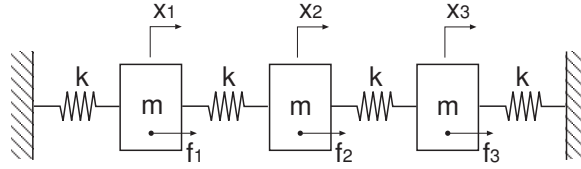


Fig. 3.2 3 質点系

これを 1 自由度系の伝達関数の式

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (3.62)$$

と比較すると、 N 個の 1 自由度系の伝達関数を行列 $\phi_n \phi_n^T$ で重み付けして重ね合わせたものであることがわかる。伝達関数行列の k 行 j 列要素は、 j 番目の外力から k 番目の変位応答までの伝達関数である。

次に調和加振に対する定常応答は、式 (3.54) と式 (3.55) において、 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}e^{i\omega t}$, $\xi_n(t) = \Xi_n e^{i\omega t}$, $\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}e^{i\omega t}$ を代入することで、外力の複素振幅と変位応答の複素振幅の関係

$$\mathbf{X} = \sum_{n=1}^N \frac{\frac{1}{m_n} \phi_n \phi_n^T}{-\omega^2 + 2i\zeta_n \omega_n \omega + \omega_n^2} \mathbf{F} \quad (3.63)$$

が得られる。そこで、

$$\mathbf{G}_f(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{\frac{1}{m_n} \phi_n \phi_n^T}{-\omega^2 + i2\zeta_n \omega_n \omega + \omega_n^2} \quad (3.64)$$

とおくと、この行列の k 行 j 列要素は、 j 番目の外力として単位振幅の調和外力を与えた際の k 番目の変位の定常応答を表すものとなる。つまり、共振曲線の式に相当するものであり、**周波数応答関数行列**と呼ばれている。やはり N 個の 1 自由度系の周波数応答関数を重み付けして重ね合わせたものになっており、したがってこのことから、 N 自由度系の共振曲線は、1 自由度系の共振曲線を重ね合わせることによって描くことができる（演習問題参照）。たとえば、減衰の小さな系において、振幅比は、一般に N 個の共振ピークを持つ曲線になる。

なお、一般に、周波数応答関数行列は伝達関数行列において $s = i\omega$ を代入したものに一致する。したがって、どちらか一方を求めておけば、もう一方は $s = i\omega$ の対応から求めることができる。

最後に単位インパルス応答であるが、式 (3.60) の伝達関数行列を逆ラプラス変換すると、 j 番目の外力を単位インパルス力としたときの k 番目の変位応答を k 行 j 列要素として持つ**単位インパルス応答行列**が求められる。系の減衰が小さく全てのモード減衰比が 1 より小さい場合は次式のようなになる。

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n \phi_n^T}{m_n \omega_{dn}} e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin \omega_{dn} t \quad (3.65)$$

ただし、 $\omega_{dn} = \sqrt{1 - \zeta_n^2} \omega_n$ である。

演習問題：3 質点系

- [1] 図 3.2 のように質量 m の三つの質点がばね定数 k の四つのばねで連結されている。この系の固有振動数とモードシェイプを求めよ。また、自由振動の一般解を示せ。
- [2] 求めたモードシェイプベクトルの直交性を確かめよ。また、正規モードシェイプを求め、このときモード剛性が固有振動数の 2 乗に等しいことを確認せよ。
- [3] 各質点に調和外力が作用するときの定常応答を求めよ。

[4] 上と同じ定常応答をモード解析を用いて求めよ.

[5] $f_1 = f_2 = 0$ として質点 3 のみを調和加振したときの各質点での応答の共振曲線を描け.

解答

[1] 固有振動数とモードシェイプを求めるために, 自由振動問題を解く. 自由振動の運動方程式は,

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

解を

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} e^{st} \quad (3.67)$$

とおき, 代入すると,

$$\begin{bmatrix} ms^2 + 2k & -k & 0 \\ -k & ms^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & ms^2 + 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

これが自明でない解を持つための条件として次の特性方程式を得る.

$$\begin{vmatrix} ms^2 + 2k & -k & 0 \\ -k & ms^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & ms^2 + 2k \end{vmatrix} = 0 \quad (3.69)$$

左辺を行列式の余因子展開を利用して計算し, 整理して因数分解すると,

$$(ms^2 + 2k) \left\{ ms^2 + (2 - \sqrt{2})k \right\} \left\{ ms^2 + (2 + \sqrt{2})k \right\} = 0 \quad (3.70)$$

を得る. これより, $s^2 = -(2 - \sqrt{2}) \frac{k}{m}$, $-2 \frac{k}{m}$, $-(2 + \sqrt{2}) \frac{k}{m}$ であり, 三つの固有振動数を持つことがわかる. 固有振動数を昇順に並べて, 1 次～3 次の固有振動数を $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ とする.

(i) $s^2 = -(2 - \sqrt{2}) \frac{k}{m}$ のとき: 1 次モードの固有振動数は,

$$\omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.71)$$

s^2 の値を式 (3.68) に代入すると,

$$k \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

上式の各行は振幅が満たすべき関係式を表しているが, このうち独立なものは二つしかなく (ランクが 2), 残り一つは二つの式の 1 次結合になっている. たとえば, 第 1 行と第 3 行を加えて $-\sqrt{2}$ で割ると第 2 行になる. そこで, 互いに独立な第 1 行と第 2 行を取り出すと,

$$\sqrt{2}X_1 - X_2 = 0, \quad -X_1 + \sqrt{2}X_2 - X_3 = 0 \quad (3.73)$$

であり, これらを解くと,

$$X_2 = \sqrt{2}X_1, \quad X_3 = X_1 \quad (3.74)$$

を得る。したがって、1次モードのモードシェイプベクトルは、 $X_1 = 1$ として規格化すると、

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

となる。

(ii) $s^2 = -2\frac{k}{m}$ のとき：2次モードの固有振動数は、

$$\omega_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.76)$$

s^2 の値を式 (3.68) に代入すると、

$$k \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

上式の各行は振幅が満たすべき関係式を表しているが、第1行と第3行は同じ式であり、独立なものは二つしかない（ランクが2）。そこで、互いに独立な第1行と第2行を取り出すと、

$$X_2 = 0, \quad -X_1 - X_3 = 0 \quad (3.78)$$

であり、これらを解くと、

$$X_2 = 0, \quad X_3 = -X_1 \quad (3.79)$$

を得る。したがって、2次モードのモードシェイプベクトルは、 $X_1 = 1$ として規格化すると、

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

となる。

(iii) $s^2 = -(2 + \sqrt{2})\frac{k}{m}$ のとき：3次モードの固有振動数は、

$$\omega_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.81)$$

s^2 の値を式 (3.68) に代入すると、

$$k \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

上式の各行は振幅が満たすべき関係式を表しているが、このうち独立なものは二つしかなく（ランクが2）、残り一つは二つの式の1次結合になっている。たとえば、第1行と第3行を加えて $\sqrt{2}$ で割ると第2行になる。そこで、互いに独立な第1行と第2行を取り出すと、

$$-\sqrt{2}X_1 - X_2 = 0, \quad -X_1 - \sqrt{2}X_2 - X_3 = 0 \quad (3.83)$$

であり、これらを解くと、

$$X_2 = -\sqrt{2}X_1, \quad X_3 = X_1 \quad (3.84)$$

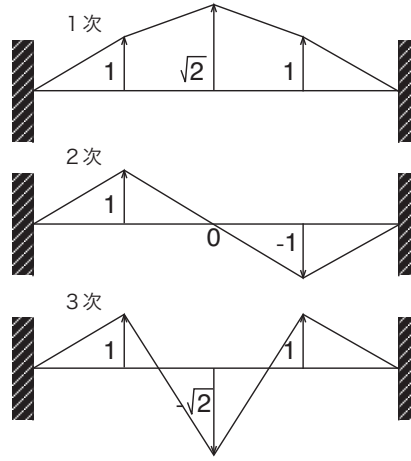


Fig. 3.3 図 3.2 の 3 質点系のモードシェイプ (ただし, 振動振幅を垂直方向に表示してある.)

を得る. したがって, 3 次モードのモードシェイプベクトルは, $X_1 = 1$ として規格化すると,

$$\phi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

となる.

以上, 1 次から 3 次まで, 求めたモードシェイプベクトルを図示すると図 3.3 のようになる. 2 次モードのモードシェイプの中央の質点における値が 0 であることに注意されたい. このような点を**節**という. 最後に, 自由振動の一般解は,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} &= a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cos \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_1 \right) \\ &+ a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos \left(\sqrt{2} \sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_2 \right) \\ &+ a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cos \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_3 \right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

となる.

- [2] まず, 式 (3.24) のモード行列を構成し, 式 (3.25), 式 (3.26) が成立することを示すことによって, モードシェイプベクトルの直交性を確かめよう. 上で求めたモードシェイプベクトルを並べると, モード行列は,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

となる. これより, 式 (3.25), 式 (3.26) 左辺はそれぞれ次のように計算され, 確かに対角行列になることがわかる.

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 4m \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(2-\sqrt{2})k & 0 & 0 \\ 0 & 4k & 0 \\ 0 & 0 & 4(2+\sqrt{2})k \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

正規モードシェイプを求めるためには、各モードのモード質量が1になるように、モードシェイプベクトルを定数倍してやればよい。すなわち、式(3.88)で求めたモード質量（右辺の対角項）の平方根で各モードシェイプベクトルを割ると、正規化されたモードシェイプベクトルを次のように得る。

$$\phi_1 = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \phi_3 = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

これを用いて式(3.26)左辺を改めて計算すると、対角項が $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2$ となり、正規モードシェイプのモード剛性が固有振動数の2乗になることが確かめられる。

[3] ここではモード解析を使わずに定常振動解を求めてみよう。外力を $[f_1 f_2 f_3]^T = [F_1 F_2 F_3]^T e^{i\omega t}$ とすると運動方程式は、

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (3.91)$$

上式の解の実部が求めたい定常振動解である（複素振幅表示の方法）。応答を $[x_1 x_2 x_3]^T = [X_1 X_2 X_3]^T e^{i\omega t}$ として運動方程式に代入すると、複素振幅に関する方程式

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k & 0 \\ -k & -m\omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2 + 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

を得る。上式より直ちに、

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k & 0 \\ -k & -m\omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2 + 2k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

これで応答の複素振幅が解けたわけで、定常応答解が求まったことになる。あとは上式に具体的な ω の値を与えて数値的に逆行列を計算してやれば、複素振幅の値を計算することができる。しかし、 ω に対して応答振幅がどのように変化するか、位相がどう変化するか、といった直感的描像を、上式から読み取ることは極めて困難である。ちなみに右辺の逆行列を実際に計算すると次式のようになり、周波数伝達関数行列の各要素は ω に関する有理式（分母と分子が多項式）になることがわかるが、依然として見通しが悪いことに変わりはない。

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$N(\omega) = \begin{bmatrix} (-m\omega^2 + k)(-m\omega^2 + 3k) & k(-m\omega^2 + 2k) & k^2 \\ k(-m\omega^2 + 2k) & (-m\omega^2 + 2k)^2 & k(-m\omega^2 + 2k) \\ k^2 & k(-m\omega^2 + 2k) & (-m\omega^2 + k)(-m\omega^2 + 3k) \end{bmatrix}$$

$$D(\omega) = (-m\omega^2 + 2k) \left\{ -m\omega^2 + (2 - \sqrt{2})k \right\} \left\{ -m\omega^2 + (2 + \sqrt{2})k \right\}$$

- [4] それでは次に、同じ問題をモード解析を用いて解いてみよう。まず、正規モードシェイプを横に並べた**正規モード行列**を作り、これを改めて Φ とおく。

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

これを用いると、モード展開の式 (3.33) は、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

規準座標系における運動方程式 (3.38) は、

$$\begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \\ \ddot{\xi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

外力を $[f_1 f_2 f_3]^T = [F_1 F_2 F_3]^T e^{i\omega t}$ とし、物理座標系での応答を $[x_1 x_2 x_3]^T = [X_1 X_2 X_3]^T e^{i\omega t}$ 、規準座標系での応答を $[\xi_1 \xi_2 \xi_3]^T = [\Xi_1 \Xi_2 \Xi_3]^T e^{i\omega t}$ として、式 (3.96) と式 (3.97) に代入すると、複素振幅の関係式

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \\ \Xi_3 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

および

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 + \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 + \omega_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \\ \Xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

を得る。式 (3.99) を $[\Xi_1 \Xi_2 \Xi_3]^T$ について解いて、式 (3.98) に代入すると、物理座標系における応答の複素振幅は次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{4m} \left\{ \frac{1}{-\omega^2 + \omega_1^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad + \frac{1}{-\omega^2 + \omega_2^2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &\quad \left. + \frac{1}{-\omega^2 + \omega_3^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.100)$$

右辺は「3行3列の行列×外力振幅ベクトル」の形になっている。この行列が、この系の周波数応答関数行列である。質点2が2次モードの節にあたるため、 X_2 には2次モードの応答が現れず、また、 F_2 は2次モードを励起しないことに注目されたい。

- [5] 以上の結果をもとに、質点3を調和加振した場合の共振曲線（すなわち周波数応答関数）を描く。式 (3.100) で $F_1 = F_2 = 0$ とすると、

$$\frac{X_1}{F_3} = \frac{1/(4m)}{-\omega^2 + \omega_1^2} - \frac{1/(2m)}{-\omega^2 + \omega_2^2} + \frac{1/(4m)}{-\omega^2 + \omega_3^2} \quad (3.101)$$

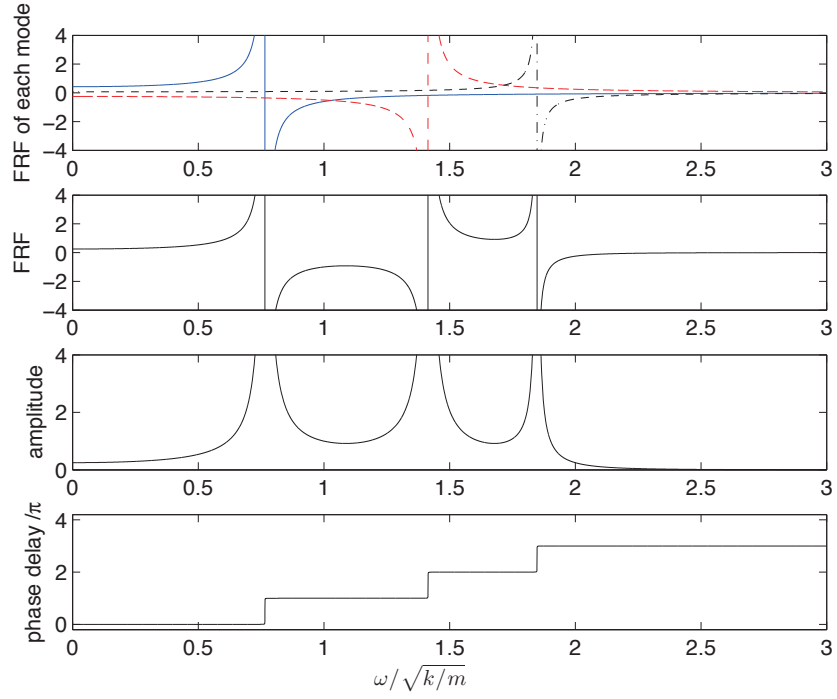


Fig. 3.4 質点3を加振したときの質点1における応答の共振曲線 (f_3 から x_1 への周波数応答関数)

これを描いたものを図 3.4 に示す. 上から順に, 上式の各項を図示したもの, f_3 から x_1 への周波数応答関数 $\frac{X_1}{F_3}$, その絶対値 (振幅比), および偏角に負号をつけたもの (位相遅れ) である. 質点1では共振点が三つあり, 各共振点で位相が180度ずつ変化する (位相が反転する) ことがわかる. 同様に,

$$\frac{X_2}{F_3} = \frac{\sqrt{2}/(4m)}{-\omega^2 + \omega_1^2} - \frac{\sqrt{2}/(4m)}{-\omega^2 + \omega_3^2} \quad (3.102)$$

$$\frac{X_3}{F_3} = \frac{1/(4m)}{-\omega^2 + \omega_1^2} + \frac{1/(2m)}{-\omega^2 + \omega_2^2} + \frac{1/(4m)}{-\omega^2 + \omega_3^2} \quad (3.103)$$

であり, これらを図 3.5, 図 3.6 に示す. 質点2 (図 3.5) は2次モードの節になっているため, 2次モードは観測されないことがわかる. また, 質点3 (図 3.6) で周波数応答関数がゼロになる振動数があるが, これを**反共振点**という. 反共振点でも位相が180度変化する (位相が反転する).

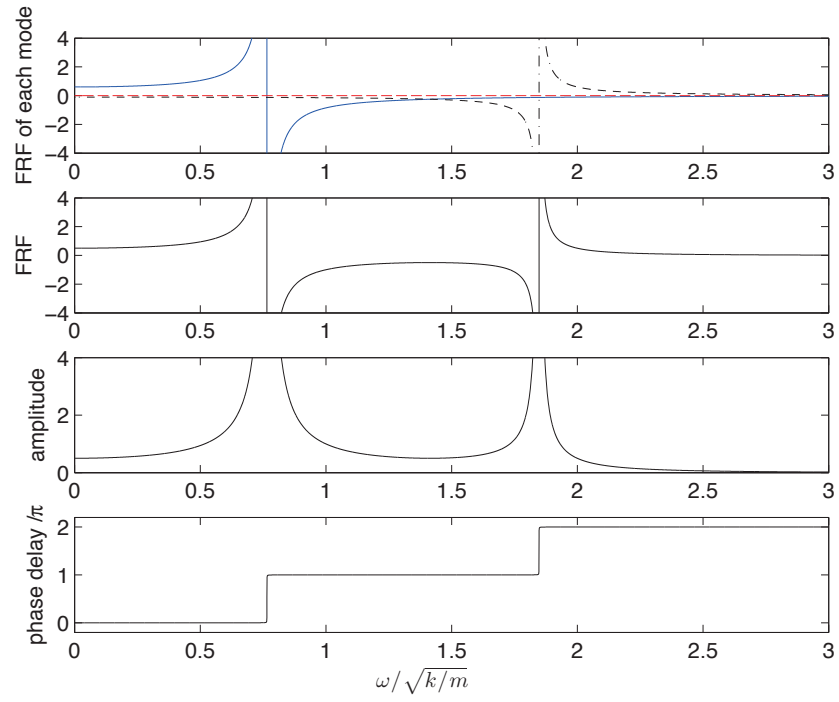


Fig. 3.5 質点3を加振したときの質点2における応答の共振曲線 (f_3 から x_2 への周波数応答関数)

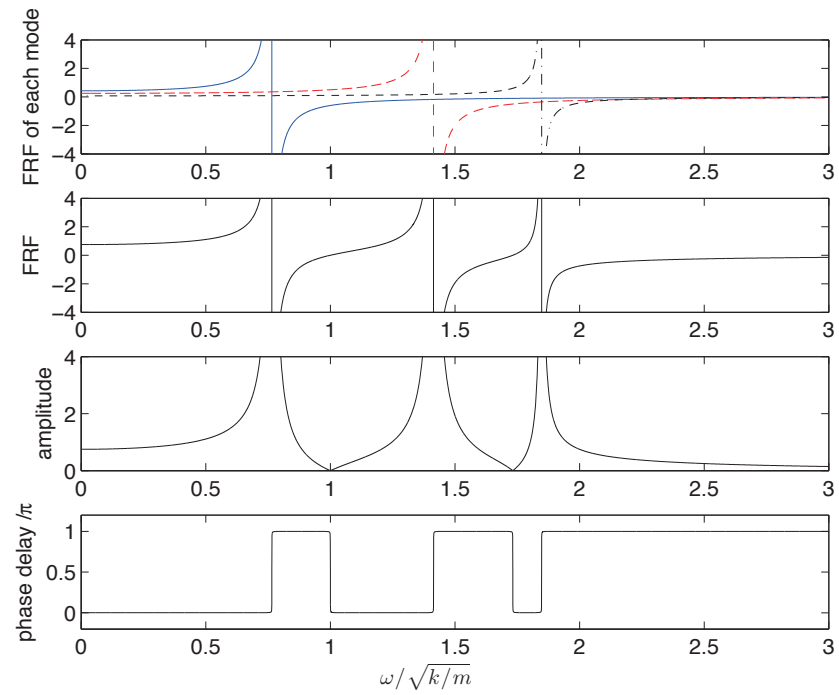


Fig. 3.6 質点3を加振したときの質点3における応答の共振曲線 (f_3 から x_3 への周波数応答関数)

第4章

制振デバイス（1）：振動絶縁

4.1 制振の一般論

振動を抑えることを制振という。対象となる物の振動様式は様々であるから、制振手法もそれに対応して様々なものが開発され応用されているが、大まかにいくつかの方策に分類できる。これを説明するためにもう一度1自由度系に戻ってみよう。

まず系のダイナミクスは運動方程式

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (4.1)$$

に支配されているから、振動を制御するためには運動方程式の各項の働きを適切に調整する、すなわち質量、減衰、剛性などのパラメータを適切に変化させるか、外力項をうまく操作するか whichever によればよい。このとき系の外部から力を加えない制御方法を **パッシブ制御**、系の外部から何らかの規則に従って力を加える方法を **アクティブ制御** という。

制振方法のうちのいくつかはエネルギーの観点から眺めると理解しやすい。運動方程式 (4.1) の両辺を x について不定積分してエネルギーの収支を表す式を導くと、 E_0 を初期エネルギーとして、

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + c \int (\dot{x})^2 dt + \frac{1}{2}kx^2 = \int f\dot{x}dt + E_0 \quad (4.2)$$

となる。運動エネルギーを T 、ポテンシャルエネルギーを U 、減衰要素による消散エネルギーを D 、外力が与える仕事を W と書くと、上式は

$$T + U = E_0 - D + W \quad (4.3)$$

となる。つまり系の振動エネルギーの増減は外力が系に対して及ぼす仕事 W と減衰要素による消散エネルギー D のバランスで決まる。なお、上式では減衰要素として粘性減衰を考えているが、一般にその他の減衰要素（摩擦や内部減衰など）に対するエネルギー表現も、このように消散エネルギーとして定式化できる。消散エネルギーは時間に対して単調増加になることに注意しよう。

振動エネルギーが小さければ系の振動振幅も小さいから、制振とは系の振動エネルギーを小さく保つ努力であると言えることができる。このようなエネルギーの観点で考えると、制振の基本戦略として次の二つが考えられる：

- エネルギーの流入を減らす；
- エネルギーの消散を増やす。

ただし、全ての制振方法がエネルギーの観点でうまく理解できるわけではないので注意が必要である。

代表的な制振手法を分類すると以下のようなになるだろう。

振動源対策 振動源に手を加え、外力項そのものを小さくしてエネルギーの流入を減らす。回転機の釣り合いを十分にとるなど、技術的・経済的に現実的でないことが多い。

振動絶縁 振動源と制振対象の間に低剛性の（柔らかな）要素を挿入することによって制振対象に伝達される力を低減する。

共振回避 外力の振動数と系の共振振動数が一致しないように、系の質量や剛性を設計する。

ダンピング 振動エネルギーを熱に変換して消散するような減衰要素を付与する。高減衰材の使用、摩擦の利用、各種ダンパ（減衰型動吸振器を含む）の付加など。

非減衰型動吸振器 動的な反力の干渉によって取り付け点の応答を低減する。動吸振器の固有振動数付近の狭い振動数帯域でしか効かない。

実際にはこれらを組み合わせて振動の低減化を行うが、特に応用範囲が広いのは振動絶縁とダンピング付加であろう。

4.2 振動絶縁

ここでは振動絶縁について解説する。振動絶縁という場合、基礎の励振に対する系の応答を評価する場合と、系から基礎に伝達される力を評価する場合があるが、後で示すように両者は同じダイナミクスに支配される。

まず基礎励振に対する系の応答を考えよう。図 4.1 において、質点は振動から保護すべき機器などを、バネとダッシュポットは基礎と機器類の間に挿入する振動絶縁装置を表す。この系において基礎の変位 x_0 が強制的に入力されるとすると、系の運動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = c\dot{x}_0(t) + kx_0(t) \quad (4.4)$$

上式の右辺に基礎の変位と速度が含まれており、これらが外力項として働いていることがわかる。したがって、 k と c をゼロにしてやれば系に対する外力はゼロとなり、当然のことであるが振動は生じない。これは基礎と機器類を完全に切り離すことを意味している。しかし通常このような処置は困難であるため、できるだけ小さな剛性と減衰要素で両者を連結することになる。これが振動絶縁の基本である。

定量的に詳しく調べるために、上式をラプラス変換して基礎変位から質点絶対変位への伝達関数を求めると、

$$T(s) = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k} \quad (4.5)$$

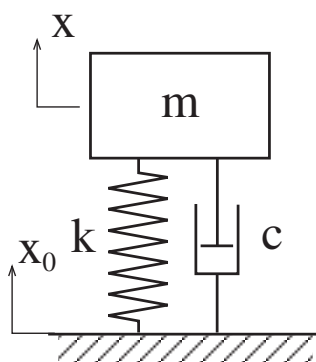


Fig. 4.1 変位励振系

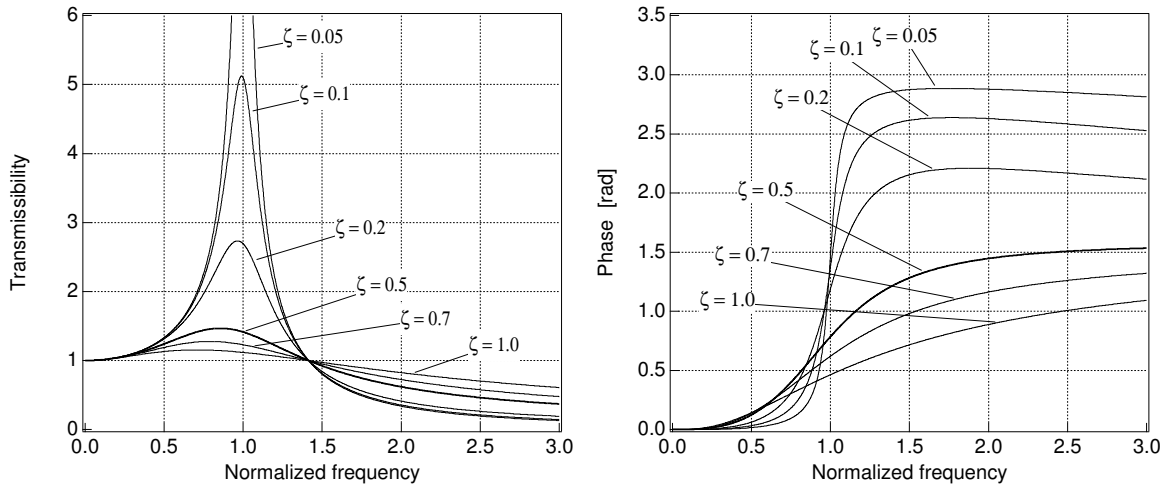


Fig. 4.2 絶対変位（絶対加速度，力）伝達率

$s = i\omega$ として周波数応答関数を求めると，その絶対値と位相遅れは，

$$|T_f(\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (4.6)$$

$$-\angle T_f(\omega) = \tan^{-1} \frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3}{1 - (1 - 4\zeta^2) \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (4.7)$$

となる． $T_f(\omega)$ を**絶対変位伝達率**という．入力として基礎の加速度，出力として質点の絶対加速度をとった場合は，式 (4.5) 右辺の分母と分子に s^2 を乗じるだけであり，全く同じ式になる．この場合は**絶対加速度伝達率**という．

絶対変位（加速度）伝達率 $T_f(\omega)$ を描いたものを図 4.2 に示す．これは次のような特徴を持っている：

- 振動数が 0 のとき伝達率は 1．振動数が 0 とは入力変位または加速度が一定で変動しないことを表すので，これは基礎と質点が等距離を保ったまま一定変位，または一定加速度で持ち上がる様子を示している．
- 伝達率の絶対値は固有振動数付近に極大点（共振点）を一つ持つ．
- 共振振動数より振動数を上げていくと伝達率の絶対値は減少する．
- $\omega/\omega_n = \sqrt{2}$ のとき，伝達率の絶対値は減衰比 ζ に無関係に 1 となる．
- $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ の領域では伝達率の絶対値は 1 未満（制振効果あり）であるが，減衰比が大きくなるほど伝達率は大きくなる．
- 位相遅れは $\omega \rightarrow 0$ で 0 に， $\omega \rightarrow \infty$ で $\pi/2$ になる．ただし減衰比が 0 のとき，位相遅れは $\omega < \omega_n$ で 0， $\omega = \omega_n$ で $\pi/2$ ， $\omega > \omega_n$ で π と不連続に変化する．

以上のことから，振動絶縁効果だけを考慮するなら，できるだけ振動数比が大きな領域で使用し，なおかつ減衰を小さくすればよいことがわかる．そのためには振動絶縁装置のばね定数と減衰係数をできるだけ小さく設計すればよい．しかし実際にそのような設計をすると，何かの拍子に系が振動を始めたとき振動を止めることができない．したがってある程度の減衰は必要である．しかし過大な減衰は高振動数領域での絶縁効果を悪化させるため，うまく設計上の妥協点を探す必要がある．また，鉛直方向の振動絶縁を行う場合には，絶縁装置は振動絶

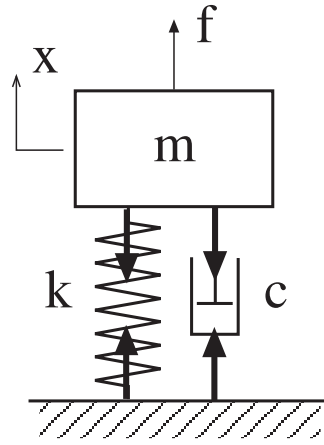


Fig. 4.3 基礎に伝達される力

縁と同時に重量を支持する必要があるため、荷重支持に必要な剛性を確保しなければならず、振動絶縁性能との両立を図ることが難しい。

次に、図 4.3 のように外力による加振を受ける振動系において基礎に伝達される力を考えよう。運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (4.8)$$

であり、基礎に伝達される力は $c\dot{x}(t) + kx(t)$ であるから、外力から伝達力までの伝達関数は、

$$T_f(s) = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k} \quad (4.9)$$

となり、対応する周波数応答関数（**力伝達率**）先ほどの絶対変位（加速度）伝達率と一致する。

第5章

制振デバイス（2）：動吸振器

今回は動吸振器について述べる。動吸振器の基本原理は2質点モデルで説明できるため、今までに学んだ多自由度系の解析の応用例としても理解しやすいであろう。

5.1 動吸振器の概要と特長

動吸振器（dynamic vibration absorber）は振動している物体を対象として、これに付加的な振動系を取り付けて両者を相互作用させることによって、対象物体の振動を抑えるための装置である。動吸振器の歴史は古く、1909年に Frahm によって発明された。これは現在では非減衰型あるいは外力同調型の動吸振器として知られているもの（図 5.1(a)）で、1934 年の Den Hartog の有名な著書 “Mechanical Vibrations” に hair clipper（バリカン）への応用例などと共に紹介されている。このタイプの動吸振器は、特定の周波数でのみ効果を発揮するので、外力が一定周波数の場合にしか利用できない。現在一般的に用いられる動吸振器のデザインは、1928 年に Ormondroyd と Den Hartog によって発明されたもので、減衰装置を備えたものである（図 5.1(b)）。このタイプの動吸振器は動吸振器のパラメータを適切に設定した場合、広い周波数範囲で効果があり、現在に至るまで様々な分野で様々な形のものが提案されている。

非減衰型および減衰型の動吸振器の動作原理を簡単にいうと次のようになる。

非減衰型 付加した動吸振器を外力に同調させる（動吸振器の固有振動数を外力の振動数に一致させる）ことによって、動吸振器のバネの復元力と外力を釣り合わせる。これによって制振対象（以下、主系）の応答はゼロになる。調和的な外力による定常強制振動にしか効果がない。

減衰型 付加した動吸振器が主系の振動と共振するように調整する（動吸振器の固有振動数を主系の固有振動数

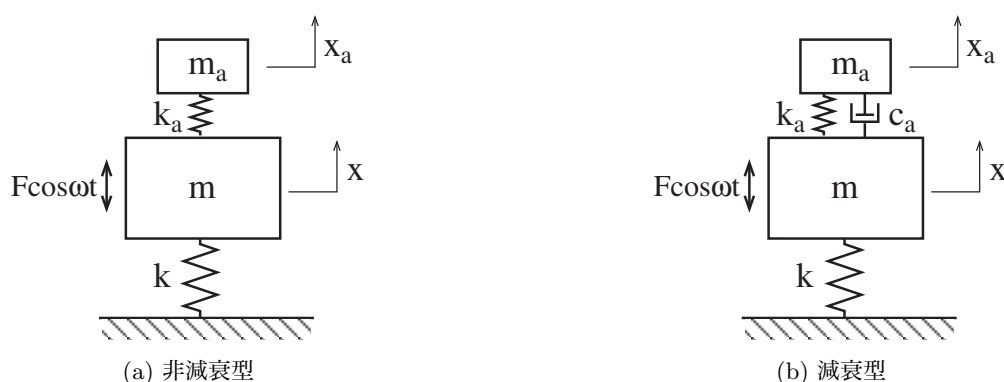


Fig. 5.1 動吸振器の種類

に近くする) ことによって、動吸振器が大きく振動するようにする。すると動吸振器の粘性減衰で消費されるエネルギーが大きくなり、結果的に主系の振動を抑制することができる。外力でなく主系に同調させるので、広い周波数範囲で効果があり、自由振動も抑制される。動吸振器の減衰は小さすぎても効果がないが、大きすぎると逆に動吸振器の振動が小さくなってしまいうのでエネルギー消費が減少する。したがって、減衰係数にも最適値が存在する。

減衰型動吸振器のパラメータの最適化は、いわゆる定点理論に基づくものが歴史的に古い。定点理論に基づく最適化は、制振対象の共振曲線の最大値を最小化するという規範を用いた最適化 (H_∞ 最適化) である。定点理論は 1932 年の Hahnkamm の研究に始まって 1946 年に Brock によって完成された。この最適化パラメータは Den Hartog の教科書で広く紹介され、今日では Den Hartog の式として知られている。定点理論は実は近似解法であり、得られるパラメータは真の最適解ではないが、最近になって西原らによって厳密解が導出された。これによると定点理論による解は近似ではあるものの、厳密解に極めて近い。したがって実用上は定点理論を理解しておけば十分である。

なお、 H_∞ 最適化の他にも、他の最適化規範に基づく最適化も可能であるが、これらについても厳密解が整備されてきている。

減衰装置として見た場合、動吸振器には次のような特長がある。

- 主系の設計を変更する必要がある。
- 固定支点を必要としない。(回転系や大規模構造物にも適用可能)
- 比較的容量の小さいダンパでも大きな減衰を得ることができる。

なお動吸振器という術語は主に機械系で用いられ、建築土木分野では同じものを TMD (tuned mass damper) と呼ぶことが多い。

5.2 動吸振器のバリエーション

非減衰型

非減衰型の動吸振器は一定振動数の調和外力しか抑制できないため、単純な回転機械や往復機械などに適用範囲が限られる。

一つの巧妙な応用例は、遠心振子式動吸振器と呼ばれるものである。これはエンジンなどのクランクシャフトのねじり振動を抑制するために用いられる。クランクシャフトにはエンジンの回転速度に同期したねじりモーメントが働くため、この外力成分による励振効果を除去したい。しかし、エンジンの回転速度は広い範囲で変化するため、通常の動吸振器では為す所がない。ところが、図 5.2 のように、バネの代わりに遠心力を用いることに

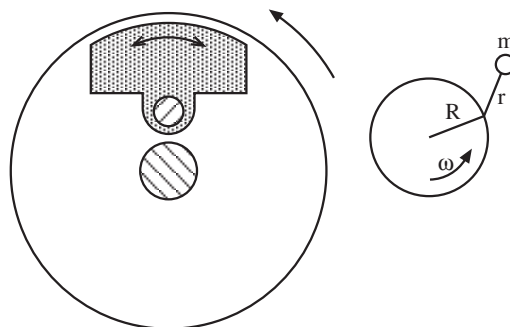


Fig. 5.2 遠心振子式動吸振器

よって、回転速度に常に同期した動吸振器を実現できる。すなわち、遠心力によるバネ効果は回転速度の2乗に比例するため、この動吸振器の固有振動数は回転速度に比例した値 $\omega\sqrt{R/r}$ になる。シャフトに作用する外力の振動数は回転速度に比例したものになるから、 $\sqrt{R/r}$ の値を外力の振動数と回転速度の比に等しくなるように選べば、全ての回転速度に対して制振効果を持つ動吸振器を作ることができる。

減衰型

基本的には主系に1自由度振動系を取り付ければよいので、いろいろな設計が可能である。バネ要素としては、通常バネの他、ゴム、振り子、液柱、液体のスロッピングなどが用いられる。減衰要素としては、オイルダンパなどの他、摩擦ダンパ、磁気ダンパ、オリフィス、ゴムなどの内部減衰などが用いられる。

いろいろな形式の動吸振器の模式図を図5.3に示す。

フードダンパ・ランチェスタダンパ・インパクトダンパ

動吸振器ではないが、似たものとして、回転軸のねじり振動抑制に用いられる**フードダンパ** (Houde damper) (図5.4 (a)) がある。これは図5.1(b) から動吸振器のバネを取り去ったものである。粘性減衰要素の代わりに摩擦減衰要素を用いたものは**ランチェスタダンパ** (図5.4 (b)) と呼ばれる。さらに減衰要素も取り去り、鋼球などの質量要素をストローク制限されたガイドで保持した形式のダンパを**インパクトダンパ** (図5.4 (c)) という。インパクトダンパでは、質量 m_a がガイドの端に衝突するときのみ主系と相互作用が生じ、また衝突に際してエネルギーの消散が起こる。したがって極めて非線形性の大きなバネ要素と減衰要素を持った動吸振器と理解することができよう。

5.3 減衰なし動吸振器の解析

図5.1(a) の非減衰型動吸振器の運動方程式は、

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx + k_a(x - x_a) = f \\ m_a\ddot{x}_a + k_a(x_a - x) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

ここで、主系の固有振動数、動吸振器の固有振動数、および質量比を、それぞれ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$, $\mu = \frac{m_a}{m}$ とおくと、

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu\omega_a^2(x - x_a) = \frac{f}{m} \\ \ddot{x}_a + \omega_a^2(x_a - x) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

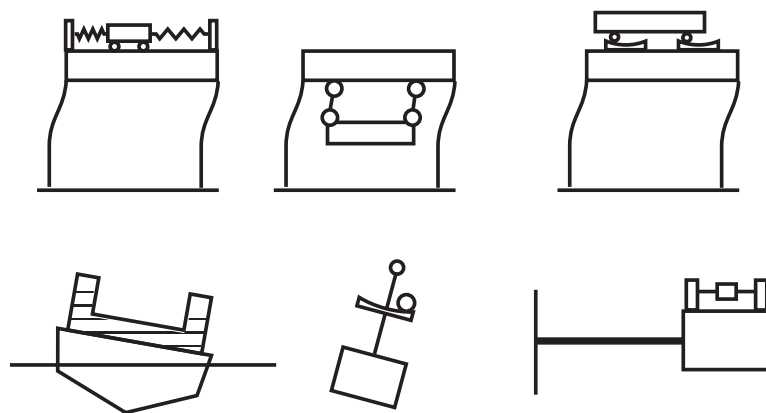


Fig. 5.3 いろいろな動吸振器

となる。

さて、 $f = Fe^{i\omega t}$ なる調和外力に対する定常応答を $x = Xe^{i\omega t}$, $x_a = X_a e^{i\omega t}$ としてこれらを代入すると、次式を得る。

$$\begin{cases} -\omega^2 X + \omega_0^2 X + \mu\omega_a^2(X - X_a) = \frac{F}{m} \\ -\omega^2 X_a + \omega_a^2(X_a - X) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

ここで、静的変位 $x_{st} = F/k$ を導入すると、第1式右辺は、 $\frac{F}{m} = \omega_0^2 \frac{F}{k} = \omega_0^2 x_{st}$ となる。両辺を $\omega_0^2 x_{st}$ で割って整理すると、

$$\begin{bmatrix} 1 + \mu\gamma^2 - \nu^2 & -\mu\gamma^2 \\ -\gamma^2 & \gamma^2 - \nu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{X}{x_{st}} \\ \frac{X_a}{x_{st}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

ここで、 $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\gamma = \frac{\omega_a}{\omega_0}$ とおいた。上式を解くと、静的変位で規格化された定常解の複素振幅、すなわち共振曲線の式が次のように求まる。

$$\frac{X}{x_{st}} = \frac{\gamma^2 - \nu^2}{(1 - \nu^2)(\gamma^2 - \nu^2) - \mu\gamma^2\nu^2} \quad (5.5)$$

$$\frac{X_a}{x_{st}} = \frac{\gamma^2}{(1 - \nu^2)(\gamma^2 - \nu^2) - \mu\gamma^2\nu^2} \quad (5.6)$$

上式の絶対値を図 5.5 に示す。

この定常解より次のことがわかる。

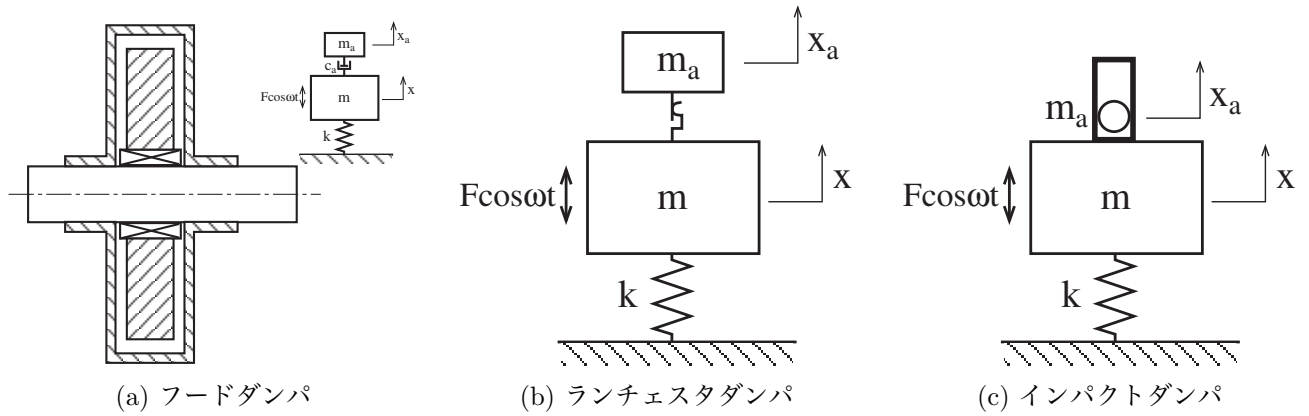
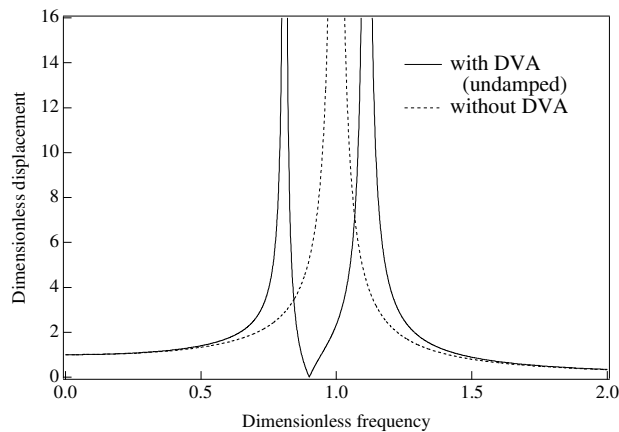


Fig. 5.4 いろいろなマスダンパ



実線：動吸振器あり， 破線：動吸振器なし

Fig. 5.5 非減衰動吸振器を取り付けた主系の振幅曲線 ($\mu = 0.1, \gamma = 0.9$)

- (分母) = 0 は ν^2 の 2 次方程式

$$\nu^4 - (1 + \gamma^2 + \mu\gamma^2)\nu^2 + \gamma^2 = 0 \quad (5.7)$$

となる。 $\mu > 0$ を考慮すると、判別式が正になるので、これは異なる 2 実根 ν_1^2, ν_2^2 ($\nu_1 > 0, \nu_2 > 0$) を持つ。 よってこの系は、 $\nu = \pm\nu_1, \pm\nu_2$ に極を持つ。 これはこれらの振動数（固有振動数）で系が共振することを意味する。

- 式 (5.5) の分子は $\nu = \pm\gamma$ すなわち $\omega = \pm\omega_a$ に零点を持つ。 よって、動吸振器の固有振動数を外力の固有振動数に一致させるとき、主系の応答は零になることがわかる。 なおこのとき、主系がばね k_a から受ける力の振幅は、

$$-k_a(X - X_a) = -\frac{\mu}{\gamma^2}k_a x_{st} = -F \quad (5.8)$$

となって、外力に釣り合っていることがわかる。

- 極と零点の順序関係。 式 (5.7) に $\nu = \gamma$ を代入すると、 $-\mu\gamma^4 < 0$ となることから、

$$\nu_1 < \gamma < \nu_2 \quad (5.9)$$

したがって、零点は 2 つの共振峰の間にある。

- 1 次の共振点は、主系と動吸振器の質量を剛結合した系の固有振動数 $\sqrt{\frac{k}{m+m_a}}$ より低く、2 次の共振点は $\sqrt{\frac{k}{m+m_a}}$ より高い。

$$\nu_1 < \sqrt{\frac{1}{1+\mu}} < \nu_2 \quad (5.10)$$

5.4 減衰あり動吸振器の解析

図 5.1(b) の減衰型動吸振器の運動方程式は、

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx + c_a(\dot{x} - \dot{x}_a) + k_a(x - x_a) = f \\ m_a\ddot{x}_a + c_a(\dot{x}_a - \dot{x}) + k_a(x_a - x) = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

ここで、主系の固有振動数、動吸振器の固有振動数、動吸振器の減衰比、および質量比を、それぞれ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$, $\zeta_a = \frac{c_a}{2\sqrt{m_a k_a}}$, $\mu = \frac{m_a}{m}$ とおくと、

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\mu\zeta_a\omega_a(\dot{x} - \dot{x}_a) + \mu\omega_a^2(x - x_a) = \frac{f}{m} \\ \ddot{x}_a + 2\zeta_a\omega_a(\dot{x}_a - \dot{x}) + \omega_a^2(x_a - x) = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

となる。 $f = Fe^{i\omega t}$ なる調和外力に対する定常応答を $x = Xe^{i\omega t}$, $x_a = X_a e^{i\omega t}$ としてこれらを代入すると、

$$\begin{cases} -\omega^2 X + \omega_0^2 X + 2i\mu\zeta_a\omega_a\omega(X - X_a) + \mu\omega_a^2(X - X_a) = \frac{F}{m} \\ -\omega^2 X_a + 2i\zeta_a\omega_a\omega(X_a - X) + \omega_a^2(X_a - X) = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

ここで、 $x_{st} = F/k$ を導入し、両辺を $\omega_0^2 x_{st}$ で割って整理すると、

$$\begin{bmatrix} 1 + \mu\gamma^2 - \nu^2 + 2i\mu\zeta_a\gamma\nu & -\mu\gamma^2 - 2i\mu\zeta_a\gamma\nu \\ -\gamma^2 - 2i\zeta_a\gamma\nu & \gamma^2 - \nu^2 + 2i\zeta_a\gamma\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{X}{x_{st}} \\ \frac{X_a}{x_{st}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

ここで、 $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\gamma = \frac{\omega_a}{\omega_0}$ とおいた。 上式を解いて若干の式の整理を行うと、定常解の複素振幅は次のように求まる。

$$\frac{X}{x_{st}} = \frac{\gamma^2 - \nu^2 + 2i\zeta_a\gamma\nu}{\{(1 - \nu^2)(\gamma^2 - \nu^2) - \mu\gamma^2\nu^2\} + 2i\zeta_a\gamma\nu(1 - \nu^2 - \mu\nu^2)} \quad (5.15)$$

$$\frac{X_a}{x_{st}} = \frac{\gamma^2 + 2i\zeta_a\gamma\nu}{\{(1-\nu^2)(\gamma^2 - \nu^2) - \mu\gamma^2\nu^2\} + 2i\zeta_a\gamma\nu(1-\nu^2 - \mu\nu^2)} \quad (5.16)$$

よって主系の振幅の絶対値は,

$$\left| \frac{X}{x_{st}} \right| = \sqrt{\frac{(\gamma^2 - \nu^2)^2 + (2\zeta_a\gamma\nu)^2}{\{(1-\nu^2)(\gamma^2 - \nu^2) - \mu\gamma^2\nu^2\}^2 + (2\zeta_a\gamma\nu)^2(1-\nu^2 - \mu\nu^2)^2}} \quad (5.17)$$

5.5 減衰あり動吸振器の最適調整

さて, 式 (5.17) は,

$$\sqrt{\frac{A + \zeta_a^2 B}{C + \zeta_a^2 D}} \quad (5.18)$$

なる形をしている. これは, $\frac{A}{C} = \frac{B}{D} = \alpha$ のとき,

$$\sqrt{\frac{\alpha(C + \zeta_a^2 D)}{C + \zeta_a^2 D}} = \sqrt{\alpha} \quad (5.19)$$

となって ζ_a^2 に無関係になるため, 主系の共振曲線は ζ_a^2 の値に関わらず定点を通ることがわかる. このような定点は,

$$\left\{ \frac{\gamma^2 - \nu^2}{(1-\nu^2)(\gamma^2 - \nu^2) - \mu\gamma^2\nu^2} \right\}^2 = \left\{ \frac{2\gamma\nu}{2\gamma\nu(1-\nu^2 - \mu\nu^2)} \right\}^2 \quad (5.20)$$

の解であり, よって,

$$\frac{\gamma^2 - \nu^2}{(1-\nu^2)(\gamma^2 - \nu^2) - \mu\gamma^2\nu^2} = \pm \frac{1}{1-\nu^2 - \mu\nu^2} \quad (5.21)$$

変形して,

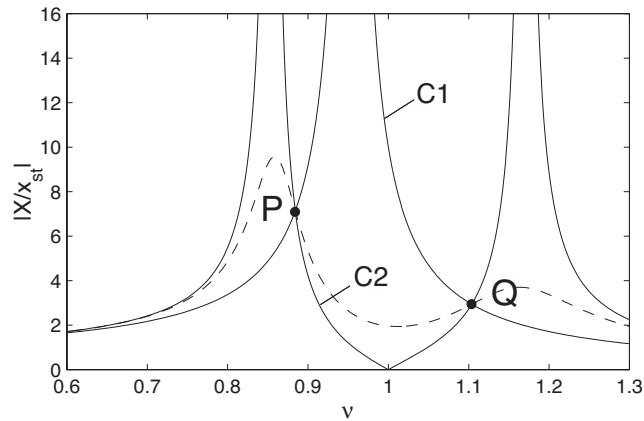
$$(1-\nu^2)(\gamma^2 - \nu^2) - \mu\gamma^2\nu^2 = \pm \{(1-\nu^2)(\gamma^2 - \nu^2) - \mu\nu^2(\gamma^2 - \nu^2)\} \quad (5.22)$$

まず, 正符号のとき,

$$-\mu\gamma^2\nu^2 = -\mu\nu^2(\gamma^2 - \nu^2) \quad (5.23)$$

より, $\nu = 0$ であるが, この定点には興味はない. 次に, 負符号のとき, 式を整理すると,

$$(2 + \mu)\nu^4 - 2(1 + \gamma^2 + \mu\gamma^2)\nu^2 + 2\gamma^2 = 0 \quad (5.24)$$



曲線 1 : $\zeta_a = \infty$, 曲線 2 : $\zeta_a = 0$, 破線 : $\zeta_a = 0.1$

Fig. 5.6 動吸振器を取り付けた主系の振幅曲線 ($\mu = 0.1, \gamma = 1$)

これは2つの解 ν_P^2, ν_Q^2 ($0 < \nu_P < \nu_Q$) を持つ。

ここで、これら二つの定点 P, Q の挙動を調べるために、図 5.6 のように、 $\zeta_a = \infty$ の場合（曲線 1; 図では C1）と $\zeta_a = 0$ （曲線 2; 図では C2）の場合を考えよう。どちらの曲線も定点を通るから、逆に言うと定点はこれら 2 曲線の交点であることに注意。

まず、 $\zeta_a = \infty$ の場合は、 m と m_a は一体となって動くので、唯一の固有振動数 $\sqrt{\frac{k}{m+m_a}}$ を持つ 1 自由度系となるから、曲線 1 は、 $\nu = \sqrt{\frac{1}{1+\mu}}$ に共振峰を持つ。次に、 $\zeta_a = 0$ の場合は、5.4 で調べた非減衰動吸振器となり、曲線 2 は零点 $\nu = \gamma$ をはさんで二つの共振峰を持つ。PQ 点はこれら二つの曲線の交点であるので、 γ すなわち主系と動吸振器の固有振動数比の値によって位置が変化することがわかる。式 (5.10) で調べたように、 $\nu_1 < \sqrt{\frac{1}{1+\mu}} < \nu_2$ であるから、明らかに、 $\nu_1 < \nu_P < \sqrt{\frac{1}{1+\mu}} < \nu_Q < \nu_2$ 、すなわち、P 点は曲線 1 の左斜面に、Q 点は曲線 1 の右斜面に來ることがわかる。よって（幾分直観的であるが、証明も可能）、 γ を小さくすれば、P 点の高さが高くなり、Q 点の高さが低くなる。逆に、 γ を大きくすれば、P 点の高さが低くなり、Q 点の高さが高くなる。

以上の考察から、次の場合に主系の共振曲線の最大高さが最小になることがわかる。

1. PQ 点の高さが等しい。
2. PQ 点で共振曲線が極大になる。

条件 1 は固有振動数比 γ を調節することで容易に実現できる。条件 2 は減衰比 ζ_a の調節によって実現されるべきであるが、結論から言えば、残念ながら、PQ 点の両方で曲線が極大値を持つような ζ_a は存在しない。そこで実際には、P 点または Q 点の片方で極大になるような ζ_a を求めることになるが、後で見るように実用上はこれで十分である。

最適パラメータ

では、具体的に最適なパラメータを決定してみよう。まず条件 1 を満たす最適な固有振動数比 γ を求めるために、PQ 点の高さを求める。 $\zeta_a = \infty$ の場合の曲線 1 の式、

$$\frac{X}{x_{st}} = \left| \frac{1}{1 - (1 + \mu)\nu^2} \right| \quad (5.25)$$

に ν_P, ν_Q を代入して、

$$\frac{X_P}{x_{st}} = \frac{1}{1 - (1 + \mu)\nu_P^2} \quad (5.26)$$

$$\frac{X_Q}{x_{st}} = -\frac{1}{1 - (1 + \mu)\nu_Q^2} \quad (5.27)$$

これらを等値して次式を得る。

$$\nu_P^2 + \nu_Q^2 = \frac{2}{1 + \mu} \quad (5.28)$$

ここで、 ν_P^2, ν_Q^2 は式 (5.24) の解であるので、解と係数の関係より、

$$\nu_P^2 + \nu_Q^2 = \frac{2(1 + \gamma^2 + \mu\gamma^2)}{2 + \mu} \quad (5.29)$$

これを式 (5.28) に代入して、 γ について解くと、固有振動数比の最適値を得る。

$$\gamma = \frac{1}{1 + \mu} \quad (5.30)$$

ν_P, ν_Q は、式 (5.24) に得られた γ を代入して解くと、

$$\nu_{P,Q}^2 = \frac{1}{1 + \mu} \left(1 \mp \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}} \right) \quad (5.31)$$

このときの PQ 点の高さは、得られた ν_P を式 (5.26) に代入して、

$$\frac{X_{P,Q}}{x_{st}} = \sqrt{\frac{2+\mu}{\mu}} \quad (5.32)$$

次に条件 2 であるが、ここから先は多少煩雑である。方針としては、 ν_P または ν_Q (以下、 $\nu_{P,Q}$ と表記) における主系共振曲線 (振幅) の傾きが零になるような ζ_a を求め、式 (5.30)～式 (5.32) を適用する。

計算をできるだけ簡単化するために、まず、共振曲線の式 (5.17) の二乗を

$$h = \frac{f}{g} \quad (5.33)$$

のように書く。すると傾きが零になる条件は、 $\left. \frac{\partial h}{\partial(\nu^2)} \right|_{\nu^2=\nu_{P,Q}} = 0$ と書ける。これを計算すると、等価な条件として次の式を得る。

$$\left. \frac{\partial g}{\partial(\nu^2)} h \right|_{\nu^2=\nu_{P,Q}} = \left. \frac{\partial f}{\partial(\nu^2)} \right|_{\nu^2=\nu_{P,Q}} \quad (5.34)$$

まず、 $\left. \frac{\partial g}{\partial(\nu^2)} \right|_{\nu^2=\nu_{P,Q}}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g}{\partial(\nu^2)} \right|_{\nu^2=\nu_{P,Q}} &= \{2\nu_{P,Q}^4 - 2(1+\gamma^2+\mu\gamma^2)\nu_{P,Q}^2 + 2\gamma^2\}\{2\nu_{P,Q}^2 - (1+\gamma^2+\mu\gamma^2)\} \\ &\quad + (2\zeta_a\gamma)^2\{1 - (1+\mu)\nu_{P,Q}^2\}\{1 - 3(1+\mu)\nu_{P,Q}^2\} \end{aligned} \quad (5.35)$$

ここで、式 (5.24) より、

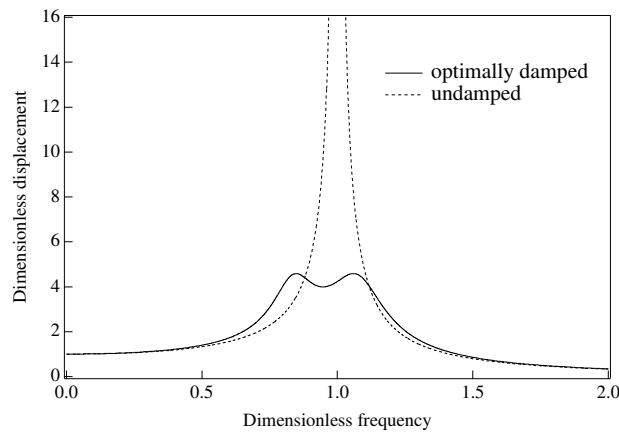
$$2(2+\mu)\nu_{P,Q}^4 - 4(1+\gamma^2+\mu\gamma^2)\nu_{P,Q}^2 + 4\gamma^2 = 0 \quad (5.36)$$

が成り立つので、これを式 (5.35) 右辺第 1 項の最初の中括弧内から引いて計算を進めると、

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g}{\partial(\nu^2)} \right|_{\nu^2=\nu_{P,Q}} &= 2(\gamma^2 - \nu_{P,Q}^2)\{1 - (1+\mu)\nu_{P,Q}^2\}\{1 + (1+\mu)\gamma^2 - 2\nu_{P,Q}^2\} \\ &\quad + (2\zeta_a\gamma)^2\{1 - (1+\mu)\nu_{P,Q}^2\}\{1 - 3(1+\mu)\nu_{P,Q}^2\} \end{aligned} \quad (5.37)$$

となる。次に、 $\left. \frac{\partial f}{\partial(\nu^2)} \right|_{\nu^2=\nu_{P,Q}}$ を計算すると、

$$\left. \frac{\partial f}{\partial(\nu^2)} \right|_{\nu^2=\nu_{P,Q}} = -2(\gamma^2 - \nu_{P,Q}^2) + (2\zeta_a\gamma)^2 \quad (5.38)$$



実線：最適調整，破線：動吸振器なし

Fig. 5.7 最適調整された動吸振器を取り付けた主系の振幅曲線 ($\mu = 0.1$)

となるので、式 (5.34) より、

$$(\zeta_a \gamma)^2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 - \nu_{P,Q}^2) \frac{1 + \{1 - (1 + \mu)\nu_{P,Q}^2\}\{1 + (1 + \mu)\gamma^2 - 2\nu_{P,Q}^2\}h}{1 - \{1 - (1 + \mu)\nu_{P,Q}^2\}\{1 - 3(1 + \mu)\nu_{P,Q}^2\}h} \quad (5.39)$$

これに、式 (5.25) より得られる、

$$h|_{\nu^2=\nu_{P,Q}} = \frac{1}{\{1 - (1 + \mu)\nu_{P,Q}^2\}^2} \quad (5.40)$$

を代入して、

$$(\zeta_a \gamma)^2 = (\gamma^2 - \nu_{P,Q}^2) \frac{2 + (1 + \mu)\gamma^2 - (3 + \mu)\nu_{P,Q}^2}{4(1 + \mu)\nu_{P,Q}^2} \quad (5.41)$$

これに、最適固有振動数比 (式 (5.30)) とそのときの $\nu_{P,Q}^2$ の値 (式 (5.31)) を代入して計算すると、結局、

$$(\zeta_a \gamma)^2 = \frac{\mu}{8(1 + \mu)^3} \left(3 \mp \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}} \right) \quad (5.42)$$

または、

$$\zeta_a^2 = \frac{\mu}{8(1 + \mu)} \left(3 \mp \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}} \right) \quad (5.43)$$

を得る。このように P 点または Q 点で振幅が極大となるための減衰の値は異なるが、両者による曲線の違いは一般にわずかである。したがって、実用上はどちらを採用しても大差ない。そこで、両者の平均を取って、

$$\zeta_a^2 = \frac{3\mu}{8(1 + \mu)} \quad (5.44)$$

すなわち、

$$\zeta_a = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)}} \quad (5.45)$$

を採用する。

以上で、与えられた質量比に対して、最適な固有振動数比および減衰比を決定することができた。質量比 0.1 の動吸振器に対して最適調整を施したものの共振曲線を図 5.7 に示す。二つのピークが等しい高さに調整され、その高さは図 5.6 の破線の最大値と比較して低くなっていることがわかる。

最後に質量比であるが、式 (5.30) より明らかに、質量比を大きくするほど、最適同調条件の下での主系の振幅は小さくなる。また、質量比を大きくするほど動吸振器のばねの振幅 (すなわち主系と動吸振器の相対変位振幅) も小さくなる。つまり質量比は大きいほどよい。しかし、だからといって巨大な錘を設置するわけにはいかないの、通常は設計上の制約から質量比の上限が決まる。主系の振幅やばねの振幅に対しては、設計条件より上限が規定されるのが普通であるから、これらの条件から質量比の下限が決まる。質量比をこの範囲内から選択し、それに対する最適同調条件を決定する、という作業を繰り返して、動吸振器の設計が確定するのが通常である。

第6章

連続体の振動（1）：運動方程式

これまでの章では、対象となる物体を、一つまたは複数の質点や剛体が質量のないバネなどで連結支持された系としてモデル化していた。このようなモデルを**離散系**または**集中定数系**という。しかし現実には真の「質点」や「剛体」や「質量のないバネ」は存在しない。どんな物体も有限な大きさや質量、有限な剛性を持つ。それにも関わらずこれまでに扱ったような離散モデルが現実をうまく近似できるのは、対象とする物体が局所的に集中した質量分布や剛性の分布を持っていたからである。

それでは、一様な棒や平板など、質量や剛性の分布が集中的でない物体はどのように表せばよいだろうか？そのような物体の変形は連続的・分布的であり、これまでのような有限自由度の集中定数モデルでは表現することができない。このような系を**連続体**または**分布定数系**という。

多自由度系の運動方程式が常微分方程式で表されたのに対して、連続体の運動方程式は偏微分方程式で表される。連続体として扱われるものには弾性体、弦や膜、流体などがあるが、厳密な取り扱いによって解を求めることができるのは単純な幾何形状を持つものに限られるため、実際には**有限要素法**や**差分法**などの数値的近似解法によって解析を行う場合が多い。しかし単純な形状の代表的モデルの解析はこれらの近似解法の基礎を与えるものであるから、この講義では厳密な取り扱いが比較的容易な、棒の縦振動、ねじり振動、弦の振動、はりの振動について述べる。今回は連続体振動の第1回として、まずこれらの連続体のダイナミクスを表す運動方程式を導き、付随する境界条件について述べる。

6.1 2階の偏微分方程式（波動方程式）で表される系

6.1.1 棒の縦振動

運動方程式 図 6.1 に示すような、断面積 $A(x)$ を有し、縦弾性係数 $E(x)$ 、密度 $\rho(x)$ を持つ棒が単位長さ当たり $f(x, t)$ の軸方向分布外力を受けているとしよう。この棒の縦変位（軸方向の変位）を $u(x, t)$ とすると、軸方向の変形によるひずみは $\partial u / \partial x$ 、断面における垂直応力は $E(x) \partial u / \partial x$ であるから、位置 x での断面における軸力は、

$$p(x, t) = A(x)E(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (6.1)$$

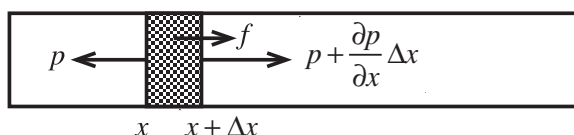


Fig. 6.1 棒の縦振動

と表される．次に、棒の微小部分 Δx における運動方程式を考える．

$$\begin{aligned}
 \rho(x)A(x)\Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= p(x+\Delta x, t) - p(x, t) + f(x)\Delta x \\
 &= \left\{ p(x, t) + \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Delta x \right\} - p(x, t) + f(x)\Delta x \\
 &= \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Delta x + f(x)\Delta x
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

ただし上式の導出に当たっては、次のステップで Δx についてゼロへの極限操作をとることを先取りして、 Δx の2次以上の項をあらかじめ削除している．これに式 (6.1) を代入すると結局、

$$\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A(x)E(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + f(x, t) \tag{6.3}$$

断面積、縦弾性係数、密度が一樣であれば、

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = AE \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{6.4}$$

これが外力の作用する一樣な棒の縦振動の運動方程式である．

さらに外力がゼロのときは、

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{6.5}$$

と書ける．ただし $c = \sqrt{E/\rho}$ とおいた．この形式の方程式は **(1次元) 波動方程式** と呼ばれる．後述のように、棒のねじり振動、弦の振動、管の中の音波などの運動方程式もこの形式となる．したがってこれらの振動の性質はいずれの場合も同じである．

境界条件 運動方程式を導出した際の過程から明らかなように、式 (6.3)～式 (6.5) の運動方程式は棒上の任意の一点 x において成立する関係式である．すなわち、運動方程式は棒の局所的なダイナミクスを記述するものであり、これだけでは棒のダイナミクスの全体像を表現することはできない．特に棒の端がどうなっているかの情報が不足しており、棒のダイナミクスを完全に記述するためには、別途**境界条件**が必要である．

境界条件は境界すなわち棒の端点における支持条件を表すものであり、端点における状態量に関する関係式である．長さ ℓ の棒の縦振動の場合、端点 $x_b = 0, \ell$ における状態量は、

- 端点での縦変位 $u(x_b, t)$
- 端点での軸力 $p(x_b, t)$

の二種類であり、これらの状態量に対して、両端点において一つずつ関係式を与えることによって、端点の支持条件を定めることができる．代表的な境界条件は次の二つであろう．

- 固定端：端点の変位が0

$$u(x_b, t) = 0 \tag{6.6}$$

- 自由端：端点の軸力が0

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_b} = 0 \tag{6.7}$$

この他に、

- 弾性支持端：端点の軸力と変位が比例
- 強制変位
- 強制軸力

などの境界条件も考え得る．

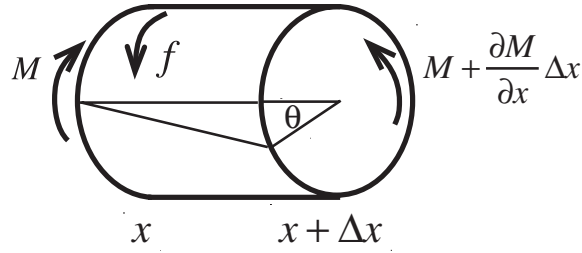


Fig. 6.2 棒のねじり振動

6.1.2 棒のねじり振動

運動方程式 図 6.2 に示すような、横弾性係数 $G(x)$ 、断面極 2 次モーメント $J_p(x)$ を持ち、単位長さ当たりの慣性モーメントが $I(x) = \rho(x)J_p(x)$ なる丸棒が、単位長さ当たり $f(x, t)$ のねじりモーメントを受けているとしよう。この棒のねじり角を $\theta(x, t)$ とすると、ねじり変形による位置 x でのねじりモーメントは、

$$M(x, t) = G(x)J_p(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \quad (6.8)$$

と表される。棒の微小部分 Δx における運動方程式を考えると、

$$\begin{aligned} \rho(x)J_p(x)\Delta x \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} &= M(x + \Delta x, t) - M(x, t) + f(x, t)\Delta x \\ &= \left\{ M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \Delta x \right\} - M(x, t) + f(x, t)\Delta x \\ &= \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \Delta x + f(x, t)\Delta x \end{aligned} \quad (6.9)$$

ただし上式の導出に当たっては、次のステップで Δx についてゼロへの極限操作をとることを先取りして、 Δx の 2 次以上の項をあらかじめ削除している。これに式 (6.8) を代入すると、

$$\rho(x)J_p(x) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(G(x)J_p(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) + f(x, t) \quad (6.10)$$

横弾性係数、断面極 2 次モーメント、密度が一樣であれば、

$$\rho J_p \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = G J_p \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (6.11)$$

これが外力モーメントの作用する一様な棒のねじり振動の運動方程式である。

さらに外力モーメントがゼロのときは、

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \quad (6.12)$$

と波動方程式の形に書ける。ただし $c = \sqrt{G/\rho}$ とおいた。

境界条件 棒のねじり振動における端点での状態量は、

- 端点でのねじり角 $\theta(x_b, t)$
- 端点でのねじりモーメント $M(x_b, t)$

の二種類であり、これらの状態量に対して、両端点において一つずつ関係式を与えることによって、端点の支持条件を定めることができる。代表的な境界条件は次の二つである。

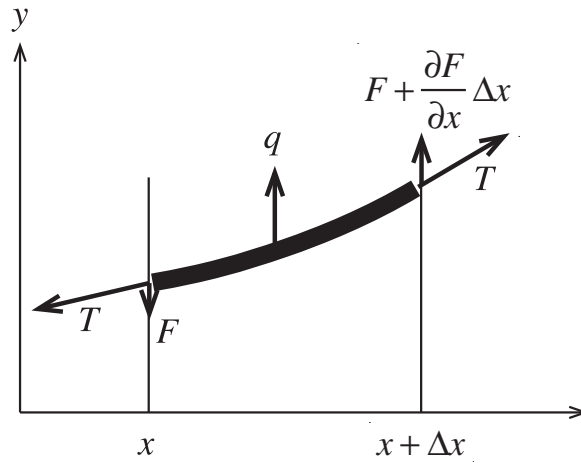


Fig. 6.3 弦の横振動

- 固定端：端点のねじり角が0

$$\theta(x_b, t) = 0 \quad (6.13)$$

- 自由端：端点のねじりモーメントが0

$$\left. \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_b} = 0 \quad (6.14)$$

6.1.3 弦の振動

運動方程式 図 6.3 に示すように、線密度（単位長さあたりの質量） μ で張力 $T(x)$ が作用する弦が単位長さ当たり $q(x, t)$ の横方向外力を受けているとしよう。ただし弦の軸方向の弾性変形の影響は無視できるとし、また弦は十分に柔軟であるとする。この弦の横変位を $y(x, t)$ とすると、位置 x で張力の y 方向分力は、

$$F(x, t) = T \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \quad (6.15)$$

と表される。したがって弦の微小部分 Δx における運動方程式を考えると、

$$\begin{aligned} \mu(x) \Delta x \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} &= F(x + \Delta x, t) - F(x, t) + q(x) \Delta x \\ &= \left\{ F(x, t) + \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \Delta x \right\} - F(x, t) + q(x, t) \Delta x \\ &= \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \Delta x + q(x, t) \Delta x \end{aligned} \quad (6.16)$$

ただし上式の導出に当たっては、次のステップで Δx についてゼロへの極限操作をとることを先取りして、 Δx の2次以上の項をあらかじめ削除している。これに式 (6.15) を代入すると、

$$\mu(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) + q(x, t) \quad (6.17)$$

張力、線密度が一様であれば、

$$\mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + q(x, t) \quad (6.18)$$

これが外力の作用する一様な弦の横振動の運動方程式である。

さらに外力がゼロのときは、

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (6.19)$$

と波動方程式の形に書ける。ただし $c = \sqrt{T/\mu}$ とおいた。

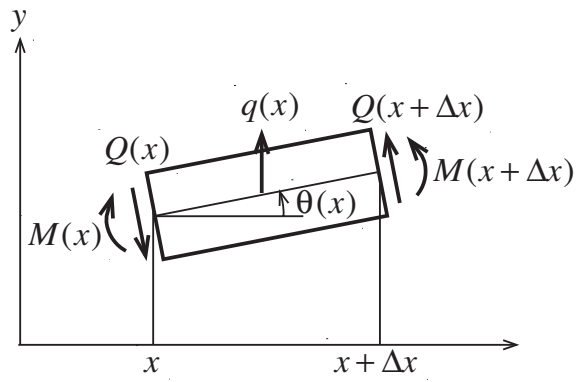


Fig. 6.4 はりの曲げ振動

境界条件 弦の横振動における端点での状態量は,

- 端点での横変位 $y(x_b, t)$
- 端点での傾斜角 $\partial y(x_b, t)/\partial x$

の二種類であり, これらの状態量に対して, 両端点において一つずつ関係式を与えることによって, 端点の支持条件を定めることができる. 弦においては

- 固定端: 端点の変位が 0

$$y(x_b, t) = 0 \quad (6.20)$$

が与えられることが普通である.

6.2 4 階の偏微分方程式で表される系

6.2.1 はりの曲げ振動

運動方程式 細く長い棒の曲げ変形を考えると, 「はり」という呼び方をする. 特に, 曲げによる変形のみを考えて, セン断による変形および回転慣性の影響を無視したモデルを**オイラー・ベルヌーイはり**という.

図 6.4 のような, 縦弾性係数 $E(x)$, 断面 2 次モーメント $I(x)$, 密度 $\rho(x)$, 断面積 $A(x)$ を持つはりが単位長さ当たり $q(x, t)$ なる分布外力を受けて横振動しているとする. このはりの微小部分 Δx における運動方程式を考えるために, 材料力学の復習を若干しておこう.

位置 x におけるはりの断面に出現する内力はせん断力 Q と曲げモーメント M である. これらははりを仮想的に切断したときにはりがバラバラにならないようにつなぎ止めておくために必要な力であって, 断面の左右で横変位 (たわみ) y が連続になるためにせん断力が, たわみ角 θ が連続になるために曲げモーメントが出現する. これらの内力に対して, 図 6.4 のように正の方向を定める. すなわち, せん断力については右上がりのせん断変形になるような方向を正, 曲げモーメントについては下に凸の曲げ変形になるような方向を正とする. この正方向の定義は, 首尾一貫さえしていれば別に反対でもよい. いずれ同じ結論にたどり着く.

まず, せん断力 Q と曲げモーメント M の関係から. これは図 6.4 の微小部分について, 点 $x + \Delta x$ でのモーメントの釣り合いを考えたのち, Δx についてゼロへの極限操作をとることによって,

$$Q(x, t) = -\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \quad (6.21)$$

となる.

次に、曲げモーメント M であるが、これは、はりを曲げたとき、内側が軸方向圧縮を外側が軸方向引張りを受けることによってたらされる。位置 x における断面内の点に作用する引張応力は、断面の**図心**を通る**中立面上**に原点をおいた y 軸方向の局所座標を η として、

$$\sigma_x(x, \eta, t) = -E(x)\eta \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \quad (6.22)$$

と書ける（右辺に負号が付くのは $\partial \theta(x, t)/\partial x$ が正のとき η の正側で圧縮変形になるからである）ことから、

$$M(x, t) = - \int_{A(x)} \eta \sigma_x(x, \eta, t) dS = E(x)I(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \quad (6.23)$$

となる。 $\int_{A(x)} \cdot dS$ は位置 x における断面内での面積分である。上式右辺で I は**断面2次モーメント**であり、次式で定義される。

$$I(x) = \int_{A(x)} \eta^2 dS \quad (6.24)$$

最後にたわみ角 θ であるが、これはたわみ y の勾配であり、

$$\theta(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \quad (6.25)$$

と表される。

以上を踏まえて、はりの微小部分 Δx における y 方向の運動方程式を考えると、

$$\begin{aligned} \rho(x)A(x)\Delta x \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} &= Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t) + q(x)\Delta x \\ &= \left\{ Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Delta x \right\} - Q(x, t) + q(x, t)\Delta x \\ &= \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Delta x + q(x, t)\Delta x \end{aligned} \quad (6.26)$$

ただし上式の導出に当たっては、次のステップで Δx についてゼロへの極限操作をとることを先取りして、 Δx の2次以上の項をあらかじめ削除している。上式に式 (6.21)、式 (6.23) および式 (6.25) を代入すると、

$$\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) = q(x, t) \quad (6.27)$$

となる。特に、 EI および ρA が一様であれば、

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = q(x, t) \quad (6.28)$$

これが外力の作用する一様なはりの曲げ振動の運動方程式である。

境界条件 はりの曲げ振動における端点での状態量は、

- 端点でのたわみ $y(x_b, t)$
- 端点でのたわみ角 $\partial y(x_b, t)/\partial x$
- 端点での曲げモーメント $M(x_b, t)$
- 端点でのせん断力 $Q(x_b, t)$

の四種類であり、これらの状態量に対して、両端点において二つずつ関係式を与えることによって、端点の支持条件を定めることができる。代表的な境界条件は次の三つである。

- 固定端：たわみとたわみ角が0

$$y(x_b, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_b} = 0 \quad (6.29)$$

- 単純支持：たわみと曲げモーメントが0

$$y(x_b, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=x_b} = 0 \quad (6.30)$$

- 自由端：曲げモーメントとせん断力が0

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=x_b} = \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=x_b} = 0 \quad (6.31)$$

むろん、より複雑な境界条件、たとえば弾性支持されている場合や、端点が質点や剛体に接続されているものを考えることもできる。

第7章

連続体の振動（2）：自由振動

今回は連続体の自由振動を扱う。4章および5章で学んだように、多自由度系では自由振動問題を解くことによって固有振動数とモードシェイプが定まり、これらモーダルパラメータによって特徴づけられる規準振動の重ね合わせとして自由振動応答を表現することができた。その解析手順を思い出すと、

1. 解を $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}e^{st}$ と仮定して運動方程式に代入。
2. 特性方程式 $|\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K}| = 0$ から極を求める。
3. それぞれの極について $(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K})\mathbf{X} = \mathbf{0}$ を解いて応答の振幅比を求める。
4. 得られた解を重ね合わせて一般解を得る。

となっていた。

連続体でも本質的な流れは同じである。しかし、

- 応答の空間分布が連続関数で表される。（多自由度離散系ではベクトル）
- 境界条件が運動方程式と別に与えられる。（多自由度離散系では運動方程式に境界条件を折り込み済み）

の二点が多自由度系と異なるため、解析手順も少し違ったものになってくる。

7.1 波動方程式で表される系の自由振動

前章で述べたように、外力の作用しない一様な棒の縦振動、ねじり振動、弦の横振動などは、次の波動方程式で表現される。

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (7.1)$$

これに境界条件として、 $y(0, t) = 0$, $\frac{\partial y}{\partial x}(\ell, t) = 0$ などの**同次境界条件**が与えられたとして、自由振動を求めてみよう。

まず、解の形を

$$y(x, t) = Y(x) e^{i\omega t} \quad (7.2)$$

とおく。ここで ω は実数とする。上で述べた離散系の場合と同様に、時間依存の指数関数とその振幅の空間分布に分けた形である。しかし離散系では振幅の空間分布がベクトルで表されていたのに対して、ここでは $Y(x)$ なる「連続関数」で表現されていることに注意しよう。なお時間依存部分を $e^{i\omega t}$ と表したのは、単に後の煩雑さを避けるためであり、もし代わりに e^{st} とおいても全く同じ結果に到達する。

これを式 (7.1) に代入すると,

$$\left\{ -\omega^2 Y(x) - c^2 \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right\} e^{i\omega t} = 0 \quad (7.3)$$

整理して次式を得る.

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + k^2 Y(x) = 0 \quad (7.4)$$

式 (7.4) は振幅の空間分布 $Y(x)$ が満たすべき微分方程式である. ただし k は次式を満たす正またはゼロの実数として定義した.

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{したがって} \quad |\omega| = ck \quad (7.5)$$

ここから先は, k がゼロかどうかによって別の扱いが必要になる. まず $k > 0$ のとき, この微分方程式の一般解は C_1, C_2 を任意定数として,

$$Y(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \quad (7.6)$$

となる. k は波長の逆数に 2π を乗じたものに相当し, 単位長さ当たりに含まれる波の個数を表すため, **波数**と呼ばれる.

次に $k = 0$ のとき, 式 (7.4) の一般解は C_1, C_2 を任意定数として,

$$Y(x) = C_1 x + C_2 \quad (7.7)$$

である.

次に境界条件を考慮する. 例として両端固定の条件を設定すると,

$$y(0, t) = y(\ell, t) = 0 \quad (7.8)$$

よって式 (7.2) より

$$Y(0) = Y(\ell) = 0 \quad (7.9)$$

これと式 (7.6) または式 (7.7) から, 定数 C_1, C_2 について, 境界条件を満たすための条件を求めることができる.

まず $k > 0$ としよう. このとき, 式 (7.6) と式 (7.9) より,

$$C_1 = 0 \quad (7.10)$$

$$C_1 \cos k\ell + C_2 \sin k\ell = 0 \quad (7.11)$$

まとめると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos k\ell & \sin k\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

$C_1 = C_2 = 0$ は明らかに解の一つだが, これはいわゆる自明な解であり, 興味はない. そこで, 非自明な解を持つための条件を求めると,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos k\ell & \sin k\ell \end{vmatrix} = 0 \quad (7.13)$$

より

$$\sin k\ell = 0 \quad (7.14)$$

を得る. これがこの問題の**特性方程式** (または**振動数方程式**) であり, これを解くと波数 k が決まって, さらに式 (7.5) より自由振動の振動数 ω が決まる. 多自由度離散系の場合, 運動方程式に解表現を代入して, 非自明な解を持つための条件より直ちに固有振動数を得たが, 連続体の場合には, 運動方程式に加えて境界条件を考慮してはじめて固有振動数が得られるのである.

振動数方程式 (7.14) の解は, $k > 0$ を考慮すると,

$$k\ell = \pi, 2\pi, \dots \quad (7.15)$$

よって振動数は, 式 (7.5) より,

$$\omega = \pm\omega_n \quad (7.16)$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{\ell} \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.17)$$

となる. ω_n は**固有振動数**と呼ばれる. このとき式 (7.12) は,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (-1)^n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

これより $C_1 = 0$, C_2 は任意. よって境界条件 (両端固定) を満たす振幅分布として

$$Y_n(x) = C_2 \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.19)$$

を得る. 多自由度系の場合と同様に, 振幅分布は定数倍の任意性を持つことがわかる. そこでたとえば $C_2 = 1$ としたものを $\phi_n(x)$ とすると,

$$\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.20)$$

これは多自由度系の場合のモードシェイプベクトルに相当するものであり, **固有モード関数**, **固有関数**などと呼ばれる.

次に $k = 0$ のときであるが, 境界条件式 (7.9) で表される両端固定の場合, 式 (7.7) とより直ちに $C_1 = C_2 = 0$ となってしまう, これは自明な解であるから除外されてしまうのである. $k = 0$ でかつ自明でない解が存在するのは境界条件が

$$\frac{dY(0)}{dx} = \frac{dY(\ell)}{dx} = 0 \quad (7.21)$$

で表される両端自由の場合であり, このときのみ,

$$Y_0(x) = C_2 \quad (7.22)$$

が境界条件を満たす振幅分布となる. これはいわゆる**剛体モード**であり, 弾性変形を伴わない単なる並進運動を表す. 固有振動数は $\omega_0 = 0$ であり, 固有モード関数は,

$$\phi_0(x) = 1 \quad (7.23)$$

である.

以上より, 自由振動の一般解は,

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) (X_{n1} e^{i\omega_n t} + X_{n2} e^{-i\omega_n t}) \quad (7.24)$$

または別の等価な表現として,

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (7.25)$$

となる (4.2.2 参照). 任意定数 a_n, φ_n は初期条件から決められるが, その方法については次章に述べる.

ここまでで自由振動の一般解が導出できたわけだが, 導出の流れをまとめておく.

1. 解を $y(x, t) = Y(x)e^{i\omega t}$ と仮定して運動方程式に代入.

2. $Y(x)$ についての微分方程式を解き、境界条件を考慮.
3. 非自明な解を持つための条件より振動数方程式を導き、固有振動数を求める.
4. 求めた固有振動数に対応する固有モード関数を求める.
5. 得られた解を重ね合わせて一般解を得る.

得られた自由振動の一般解 (式 (7.25)) の性質と関連する用語をまとめよう.

- 自由振動は無限個の単振動成分の重ね合わせである. この単振動それぞれを**規準振動**という.
- 規準振動の重ね合わせの混合比率は初期条件で決まる.
- それぞれの規準振動は固有振動数 ω_n を持ち、振動の空間的な形 (振幅の空間分布) は次固有モード関数で与えられる.
- つまり、それぞれの規準振動は、固有振動数とモードシェイプベクトルで特徴づけられる. これらをまとめて**モーダルパラメータ**という.
- 規準振動のことを、**振動モード**と呼んだり**固有モード**と呼んだりすることもある.

なおここでは両端固定の場合について解を求めたが、他の境界条件の場合も同様の手順である.

7.2 はりの自由振動

一様なはりの自由振動の運動方程式は、

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = 0 \quad (7.26)$$

である. 先ほどと同様に、 ω を実数として、解を

$$y(x, t) = Y(x) e^{i\omega t} \quad (7.27)$$

とおいて代入すると、

$$\left\{ -\rho A \omega^2 Y(x) + EI \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} \right\} e^{i\omega t} = 0 \quad (7.28)$$

整理して次式を得る.

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - k^4 Y(x) = 0 \quad (7.29)$$

式 (7.29) は振幅の空間分布 $Y(x)$ が満たすべき微分方程式である. ただし k は次式を満たす正またはゼロの実数として定義した.

$$k^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \quad \text{したがって} \quad |\omega| = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} k^2 \quad (7.30)$$

まず $k > 0$ のとき、式 (7.29) の解を $e^{\lambda x}$ とおいてみると、 $(\lambda^4 - k^4)e^{\lambda x} = 0$ より、 $\lambda = \pm ik, \pm k$. したがって一般解は、 A_1, A_2, A_3, A_4 を任意定数として、

$$Y(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx} + A_3 e^{kx} + A_4 e^{-kx} \quad (7.31)$$

となるが、より便利な次の形に書き換えておく.

$$Y(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 \cosh kx + C_4 \sinh kx \quad (7.32)$$

ただし,

$$A_1 = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2) \quad (7.33)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2) \quad (7.34)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(C_3 + C_4) \quad (7.35)$$

$$A_4 = \frac{1}{2}(C_3 - C_4) \quad (7.36)$$

とおいた,

次に $k = 0$ のときは, 式 (7.29) の一般解は C_1, C_2, C_3, C_4 を任意定数として,

$$Y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (7.37)$$

である.

次に境界条件を考慮する.

7.2.1 両端単純支持の場合

例として両端単純支持の場合を考えよう. 境界条件は,

$$y(0, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) = y(\ell, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\ell, t) = 0 \quad (7.38)$$

よって,

$$Y(0) = \frac{d^2 Y}{dx^2}(0) = Y(\ell) = \frac{d^2 Y}{dx^2}(\ell) = 0 \quad (7.39)$$

を満たさなければならない.

まず $k > 0$ としよう. 準備として式 (7.32) より $\frac{d^2 Y}{dx^2}$ を求めておく.

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = k^2(-C_1 \cos kx - C_2 \sin kx + C_3 \cosh kx + C_4 \sinh kx) \quad (7.40)$$

したがって, 境界条件を満たすための条件として次式を得る.

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (7.41)$$

$$-C_1 + C_3 = 0 \quad (7.42)$$

$$C_1 \cos k\ell + C_2 \sin k\ell + C_3 \cosh k\ell + C_4 \sinh k\ell = 0 \quad (7.43)$$

$$-C_1 \cos k\ell - C_2 \sin k\ell + C_3 \cosh k\ell + C_4 \sinh k\ell = 0 \quad (7.44)$$

前半の二式より $C_1 = C_3 = 0$, よって,

$$\begin{bmatrix} \sin k\ell & \sinh k\ell \\ -\sin k\ell & \sinh k\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

これより, 非自明な解を持つための条件として,

$$\sin k\ell \sinh k\ell = 0 \quad (7.46)$$

を得る. さらに $k > 0$ より $\sinh k\ell > 0$ に注意すると, これは

$$\sin k\ell = 0 \quad (7.47)$$

と等価である。これがこの問題の**特性方程式**（または**振動数方程式**）であり、これを解くと波数 k が決まって、さらに式 (7.30) より自由振動の振動数 ω が決まる。振動数方程式 (7.47) の解は、 $k > 0$ を考慮すると、

$$k\ell = \pi, 2\pi, \dots \quad (7.48)$$

よって振動数は、式 (7.30) より、

$$\omega = \pm\omega_n \quad (7.49)$$

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.50)$$

となる。 ω_n は**固有振動数**と呼ばれる。このとき式 (7.45) は、

$$\begin{bmatrix} 0 & \sinh k\ell \\ 0 & \sinh k\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

これより $C_4 = 0$, C_2 は任意、を得る。よって境界条件（両端単純支持）を満たす振幅分布として

$$Y_n(x) = C_2 \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.52)$$

を得る。 $C_2 = 1$ としたものを $\phi_n(x)$ とおくと、

$$\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.53)$$

これがこの問題における**固有モード関数**である。

いっぽう、 $k = 0$ のときは、式 (7.37) と境界条件式 (7.39) より、 $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ となり、非自明な解は存在しない。

以上より、両端単純支持はりの自由振動の一般解は、

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n \cos(\omega_n t - \varphi_n) \quad (7.54)$$

となる。任意定数 a_n, φ_n は初期条件から決められるが、その方法については次章に述べる。

7.2.2 両端固定の場合

次に、両端固定の場合を考えよう。境界条件は、

$$y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = y(\ell, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(\ell, t) = 0 \quad (7.55)$$

よって、

$$Y(0) = \frac{dY}{dx}(0) = Y(\ell) = \frac{dY}{dx}(\ell) = 0 \quad (7.56)$$

を満たさなければならない。

まず $k > 0$ のとき、準備として式 (7.32) より $\frac{dY}{dx}$ を求めておく。

$$\frac{dY(x)}{dx} = k(-C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \sinh kx + C_4 \cosh kx) \quad (7.57)$$

したがって、境界条件を満たすための条件として次式を得る。

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (7.58)$$

$$C_2 + C_4 = 0 \quad (7.59)$$

$$C_1 \cos k\ell + C_2 \sin k\ell + C_3 \cosh k\ell + C_4 \sinh k\ell = 0 \quad (7.60)$$

$$-C_1 \sin k\ell + C_2 \cos k\ell + C_3 \sinh k\ell + C_4 \cosh k\ell = 0 \quad (7.61)$$

前半の二式より $C_3 = -C_1$, $C_4 = -C_2$, よって,

$$\begin{bmatrix} \cos k\ell - \cosh k\ell & \sin k\ell - \sinh k\ell \\ -\sin k\ell - \sinh k\ell & \cos k\ell - \cosh k\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.62)$$

これより, 非自明な解を持つための条件として,

$$\cos k\ell \cosh k\ell - 1 = 0 \quad (7.63)$$

を得る. これがこの問題の**特性方程式**であり, これを解くと波数 k が決まって, さらに式 (7.30) より自由振動の振動数 ω が決まる. 振動数方程式 (7.63) は超越方程式であり解析的には解けないが, ニュートン-ラフソン法などの数値計算法によって解を得ることができる. これを

$$k\ell = \lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \dots \quad (7.64)$$

と表すと, 振動数は, 式 (7.30) より,

$$\omega = \pm\omega_n \quad (7.65)$$

で, **固有振動数** ω_n は

$$\omega_n = \frac{\lambda_n^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.66)$$

となる. 式 (7.64) の各 $k\ell$ に対して, 式 (7.62) の第 1 行目と第 2 行目は従属となるから, 第 1 行目の式だけの評価すると,

$$C_2 = -\frac{\cos \lambda_n\pi - \cosh \lambda_n\pi}{\sin \lambda_n\pi - \sinh \lambda_n\pi} C_1 \quad (7.67)$$

を得る. 上式と先に求めた $C_3 = -C_1$, $C_4 = -C_3$ を式 (7.32) に代入すると, 境界条件 (両端固定) を満たす振幅分布として

$$Y_n(x) = C_1 \left\{ \left(\cos \frac{\lambda_n\pi}{\ell} x - \cosh \frac{\lambda_n\pi}{\ell} x \right) - \frac{\cos \lambda_n\pi - \cosh \lambda_n\pi}{\sin \lambda_n\pi - \sinh \lambda_n\pi} \left(\sin \frac{\lambda_n\pi}{\ell} x - \sinh \frac{\lambda_n\pi}{\ell} x \right) \right\} \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.68)$$

を得る. $C_1 = 1$ としたものを $\phi_n(x)$ とおくと,

$$\phi_n(x) = \left(\cos \frac{\lambda_n\pi}{\ell} x - \cosh \frac{\lambda_n\pi}{\ell} x \right) - \frac{\cos \lambda_n\pi - \cosh \lambda_n\pi}{\sin \lambda_n\pi - \sinh \lambda_n\pi} \left(\sin \frac{\lambda_n\pi}{\ell} x - \sinh \frac{\lambda_n\pi}{\ell} x \right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.69)$$

これがこの問題における**固有モード関数**である.

いっぽう, $k = 0$ のときは, 式 (7.37) と境界条件式 (7.56) より, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ となり, 非自明な解は存在しない.

以上より, 両端固定はりの自由振動の一般解は,

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n \cos(\omega_n t - \varphi_n) \quad (7.70)$$

となる. 任意定数 a_n, φ_n は初期条件から決められる.

7.2.3 両端自由の場合

両端自由の場合は剛体モードが出現する。境界条件は,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(0, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\ell, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(\ell, t) = 0 \quad (7.71)$$

よって,

$$\frac{d^2 Y}{dx^2}(0) = \frac{d^3 Y}{dx^3}(0) = \frac{d^2 Y}{dx^2}(\ell) = \frac{d^3 Y}{dx^3}(\ell) = 0 \quad (7.72)$$

を満たさなければならない。

まず $k > 0$ のときは, 両端固定の場合と同様の手順であるから, 各自の演習としよう。次に $k = 0$ のときは, 式 (7.37) と境界条件式 (7.72) より, $C_1 = C_2 = 0$, C_3, C_4 は任意という結果が導かれる。すなわち, 式 (7.37) より,

$$Y(x) = C_3 x + C_4 \quad (7.73)$$

すなわちこれは,

$$\phi_{0T}(x) = 1 \quad (7.74)$$

$$\phi_{0R}(x) = x - \frac{\ell}{2} \quad (7.75)$$

の二つの固有モード関数を弾性変形を伴わない剛体モードとして有することを意味する。このうち, 式 (7.74) は剛体並進モード, 式 (7.75) は剛体回転モードである。言うまでもなく, 対応する固有振動数はいずれもゼロである。

他の境界条件についても同様だが, 両端単純支持の場合を除いて振動数方程式は一般に解析的に解けないため, 両端固定の場合と同様に数値計算によって固有振動数を求める。表 7.1～表 7.5 に, 両端単純支持, 両端固定, 両端自由, 一端固定他端自由 (片持ち) および一端固定他端単純支持の場合の, 特性方程式, 固有振動数, 固有モード関数を 1 次から 4 次まで示す。

Table 7.1 両端単純支持の場合

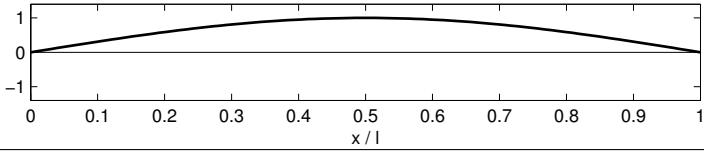
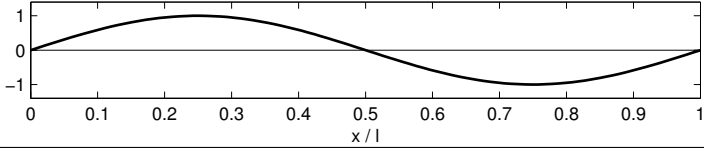
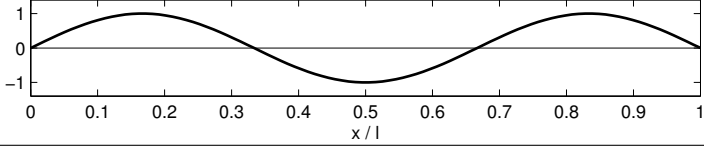
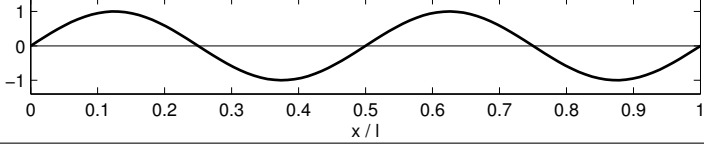
境界条件	$y(0, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) = y(\ell, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\ell, t) = 0$	
特性方程式	$\sin k\ell = 0$	
固有振動数	$\omega_n = \frac{\lambda_n^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$	
固有モード関数	$\phi_n(x) = \sin \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x$	
n	λ_n	$\phi_n(x)$
1	1	
2	2	
3	3	
4	4	

Table 7.2 両端固定の場合

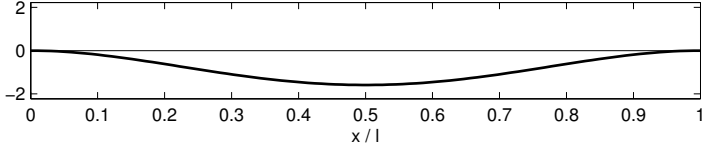
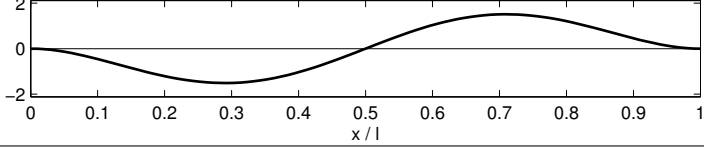
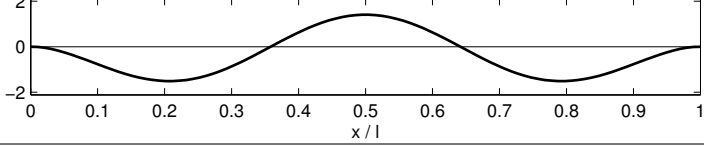
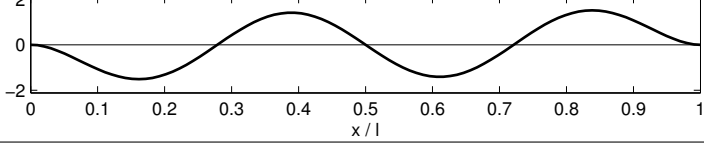
境界条件	$y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = y(\ell, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(\ell, t) = 0$	
特性方程式	$\cos k\ell \cosh k\ell - 1 = 0$	
固有振動数	$\omega_n = \frac{\lambda_n^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$	
固有モード関数	$\phi_n(x) = \left(\cos \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x - \cosh \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x \right) - \frac{\cos \lambda_n \pi - \cosh \lambda_n \pi}{\sin \lambda_n \pi - \sinh \lambda_n \pi} \left(\sin \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x - \sinh \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x \right)$	
n	λ_n	$\phi_n(x)$
1	1.506	
2	2.500	
3	3.500	
4	4.500	

Table 7.3 両端自由の場合（剛体モードは除く）

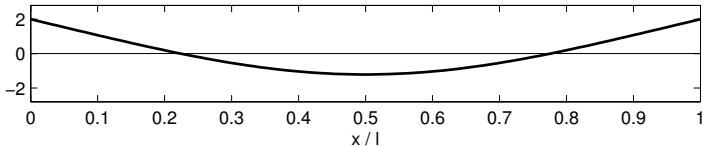
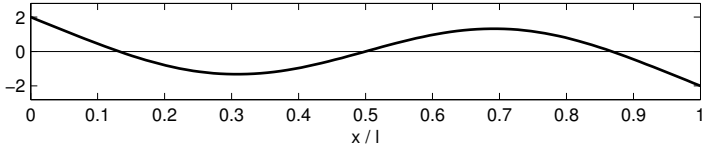
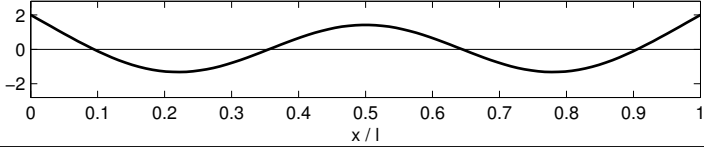
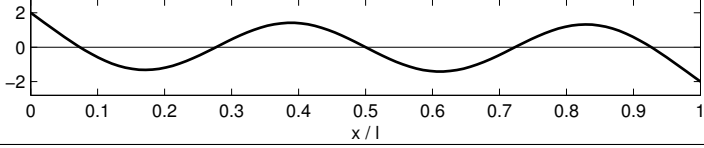
境界条件	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(0, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\ell, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(\ell, t) = 0$	
特性方程式	$\cos k\ell \cosh k\ell - 1 = 0$	
固有振動数	$\omega_n = \frac{\lambda_n^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$	
固有モード関数	$\phi_n(x) = \left(\cos \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x + \cosh \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x \right) - \frac{\cos \lambda_n \pi - \cosh \lambda_n \pi}{\sin \lambda_n \pi - \sinh \lambda_n \pi} \left(\sin \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x + \sinh \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x \right)$	
n	λ_n	$\phi_n(x)$
1	1.506	
2	2.500	
3	3.500	
4	4.500	

Table 7.4 一端固定他端自由（片持ち）の場合

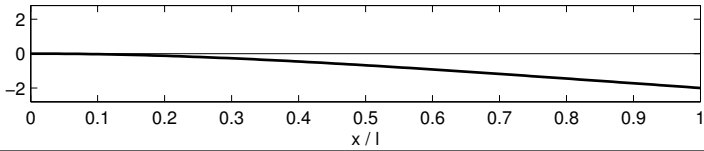
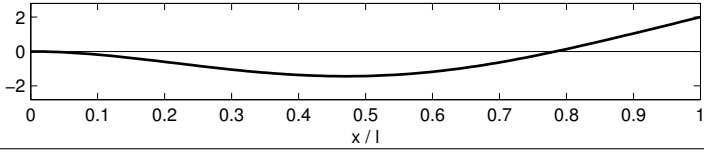
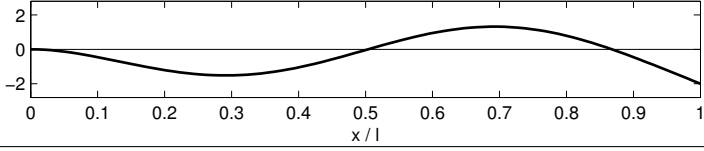
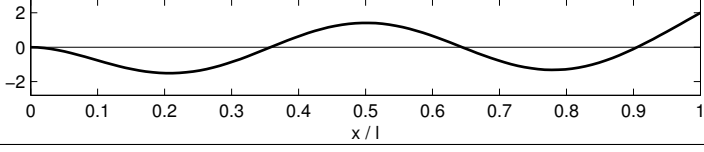
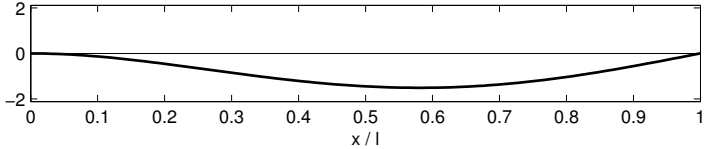
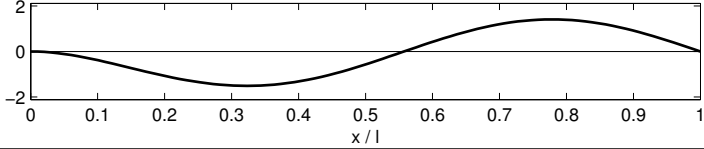
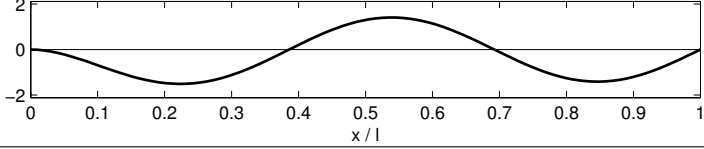
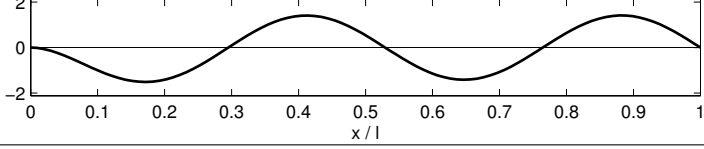
境界条件	$y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\ell, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(\ell, t) = 0$	
特性方程式	$\cos k\ell \cosh k\ell + 1 = 0$	
固有振動数	$\omega_n = \frac{\lambda_n^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$	
固有モード関数	$\phi_n(x) = \left(\cos \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x - \cosh \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x \right) - \frac{\cos \lambda_n \pi + \cosh \lambda_n \pi}{\sin \lambda_n \pi + \sinh \lambda_n \pi} \left(\sin \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x - \sinh \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x \right)$	
n	λ_n	$\phi_n(x)$
1	0.597	
2	1.494	
3	2.500	
4	3.500	

Table 7.5 一端固定他端単純支持の場合

境界条件		$y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = y(\ell, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\ell, t) = 0$
特性方程式		$\tan k\ell - \tanh k\ell = 0$
固有振動数		$\omega_n = \frac{\lambda_n^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$
固有モード関数		$\phi_n(x) = \left(\cos \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x - \cosh \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x \right) - \frac{1}{\tanh \lambda_n \pi} \left(\sin \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x - \sinh \frac{\lambda_n \pi}{\ell} x \right)$
n	λ_n	$\phi_n(x)$
1	1.250	
2	2.250	
3	3.250	
4	4.250	

第8章

連続体の振動（3）：モード解析

8.1 固有モード関数の直交性

8.1.1 離散系と連続体

第5章で述べたように，多自由度離散系ではモードシェイプベクトルに関して**直交性**が成立した．すなわち，モードシェイプ ϕ_n と ϕ_m について，

$$\phi_n^T \mathbf{M} \phi_m = \bar{m}_n \delta_{nm} \quad (8.1)$$

$$\phi_n^T \mathbf{K} \phi_m = \bar{k}_n \delta_{nm} = \bar{m}_n \omega_n^2 \delta_{nm} \quad (8.2)$$

が成立した．ここで δ_{nm} はクロネッカのデルタであり， $n = m$ のとき 1， $n \neq m$ のとき 0 と定義される記号である．

これと全く同様のことが連続体の固有モード関数についても成立する．ただし固有モード関数は空間座標に関する連続関数であるので，ベクトルや行列の積の代わりに積分が登場する．連続体の議論に入る前にこの点について少し補足しておこう．

たとえば図 8.1(a) の N 質点系を考えよう．一般化座標として質点の絶対座標系での変位をとって運動方程式を考えると，明らかに質量行列 $\mathbf{M}$ は対角要素が全て M なる対角行列になるから，式 (8.1) は

$$M \phi_n^T \phi_m = \bar{m}_n \delta_{nm} \quad (8.3)$$

となって，左辺はモードシェイプベクトル同士の**内積**になる．成分で書き下せば，

$$M \sum_{j=1}^N \phi_n(j) \phi_m(j) = \bar{m}_n \delta_{nm} \quad (8.4)$$

である．これは二つのベクトルについて，「同じインデックスの成分同士を掛け合わせて，インデックスについて総和をとったもの」である．ここでモードシェイプベクトルのインデックスは一般化座標に付けた通し番号であり

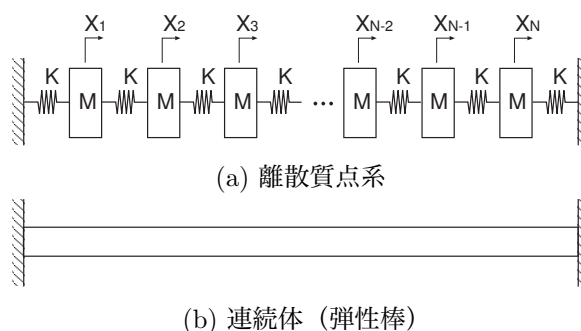


Fig. 8.1 離散系と連続体

(この例では一番目の要素は一番目の質点の変位，二番目の要素は二番目の質点の変位)，離散系における空間座標に相当するものである。したがって，式 (8.4) 左辺の内積は，「同じ空間座標における変位同士を掛け合わせて，空間座標について総和をとったもの」と言い換えることができる。

次に，図 8.1(a) において質量の総和を一定に保ちながら質点の数を増やしていこう。するとその極限は図 8.1(b) のような連続体（弾性棒）となるだろう。そしてこのとき式 (8.4) 左辺の和演算は，空間座標に関する積分になるだろう。つまり連続体においては式 (8.4) 左辺の代わりに「同じ空間座標における変位同士を掛け合わせて，空間座標について積分をとったもの」になると予想される。（詳しくは数学の話になるが，このように二つの関数の積を積分したものを関数の**内積**と呼ぶ。ベクトルの内積との類似性に注意しよう。）

このように，連続体のダイナミクスにおいては行列やベクトルの積の代わりに空間積分が登場する。では具体的にどのようなようになるのか，以下で見えていこう。

8.1.2 波動方程式で表される系

まず，1次元波動方程式で表される長さ L の系について考えよう。

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (8.5)$$

$$y(0, t) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (8.6)$$

$$y(L, t) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (8.7)$$

いま， n 次の固有振動数を ω_n ，固有モード関数を $\phi_n(x)$ とすると，前章で述べたように， $\phi_n(x)e^{i\omega_n t}$ は波動方程式を満たす（自由振動）解であったから，これを式 (8.5)～式 (8.7) に代入して次式を得る。

$$c^2 \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} + \omega_n^2 \phi_n(x) = 0 \quad (8.8)$$

$$\phi_n(0) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{d\phi_n}{dx}(0) = 0 \quad (8.9)$$

$$\phi_n(L) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{d\phi_n}{dx}(L) = 0 \quad (8.10)$$

m 次モードについても同様のことを行くと，

$$c^2 \frac{d^2 \phi_m(x)}{dx^2} + \omega_m^2 \phi_m(x) = 0 \quad (8.11)$$

$$\phi_m(0) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{d\phi_m}{dx}(0) = 0 \quad (8.12)$$

$$\phi_m(L) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{d\phi_m}{dx}(L) = 0 \quad (8.13)$$

まず，式 (8.8) に $\phi_m(x)$ をかけ，0 から L まで積分すると，

$$c^2 \int_0^L \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} \phi_m(x) dx + \omega_n^2 \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad (8.14)$$

ここで，左辺第1項に部分積分を施す。なぜ部分積分かという疑問はさておき，とりあえず計算してみると，

$$c^2 \left[\frac{d\phi_n}{dx}(x) \phi_m(x) \right]_0^L - c^2 \int_0^L \frac{d\phi_n}{dx}(x) \frac{d\phi_m}{dx}(x) dx + \omega_n^2 \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad (8.15)$$

上式の左辺第1項は， $c^2 \frac{d\phi_n}{dx}(x) \phi_m(x)$ の $x=0$, $x=L$ における値の差であるが，境界条件（式 (8.9), (8.10) および式 (8.12), (8.13)）を考慮すると， $\frac{d\phi_n}{dx}(0)$, $\phi_m(0)$ のどちらかは必ずゼロであり，同様に $\frac{d\phi_n}{dx}(L)$, $\phi_m(L)$ のどちらかは必ずゼロである。したがって，左辺第1項はゼロ。よって，

$$c^2 \int_0^L \frac{d\phi_n}{dx}(x) \frac{d\phi_m}{dx}(x) dx = \omega_n^2 \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx \quad (8.16)$$

ここまで来ると、先ほど部分積分を施したのは、境界条件を評価するためであったことが理解できよう。余談になるが、一般に分布定数系の偏微分方程式に何か関数（ここでは固有モード関数）を掛けて空間積分し、それを部分積分すると境界条件の項が出現する。そのようにして偏微分方程式と境界条件を合体させる方法を**重み付き残差法**といい、数値解法分野でよく遭遇する。

全く同様の操作を、今度は m と n を取り替えて行う。すなわち式 (8.11) に $\phi_n(x)$ をかけて 0 から L まで積分し、部分積分を行って境界条件を評価すると、次式を得る。

$$c^2 \int_0^L \frac{d\phi_m}{dx}(x) \frac{d\phi_n}{dx}(x) dx = \omega_m^2 \int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx \quad (8.17)$$

式 (8.16) と式 (8.17) の辺々を引くと、

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad (8.18)$$

$n \neq m$ のとき $\omega_n \neq \omega_m$ であるから、

$$\int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad (8.19)$$

$n = m$ のときは上式は成立せず、0 でないある値となるから、これを

$$\int_0^L \phi_n(x) \phi_n(x) dx = \bar{m}_n \quad (8.20)$$

と書く。ここで $\bar{m}_n$ は離散系の場合と同様、**モード質量**と呼ばれる。あるいは上二式をまとめて、

$$\int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = \bar{m}_n \delta_{nm} \quad (8.21)$$

さらに、これを式 (8.14) または式 (8.16) に代入すると、

$$-c^2 \int_0^L \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} \phi_m(x) dx = c^2 \int_0^L \frac{d\phi_n}{dx}(x) \frac{d\phi_m}{dx}(x) dx = \omega_n^2 \bar{m}_n \delta_{nm} = \bar{k}_n \delta_{nm} \quad (8.22)$$

ここで $\bar{k}_n$ は**モード剛性**と呼ばれる。

以上、式 (8.21) と式 (8.22) を固有モード関数の**直交性**という。

8.1.3 はりの曲げ振動

はりの場合も全く同様に固有モード関数の直交性を示すことができる。ただし、はりの運動方程式は空間に対する 4 階微分方程式なので、部分積分が二回必要になる。

n 次の固有振動数を ω_n 、固有モード関数を $\phi_n(x)$ とすると、前章の式 (7.29) より、

$$EI \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} - \rho A \omega_n^2 \phi_n(x) = 0 \quad (8.23)$$

境界条件より、

$$\phi_n(0) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{d^3 \phi_n}{dx^3}(0) = 0 \quad (8.24)$$

$$\frac{d\phi_n}{dx}(0) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{d^2 \phi_n}{dx^2}(0) = 0 \quad (8.25)$$

$$\phi_n(L) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{d^3 \phi_n}{dx^3}(L) = 0 \quad (8.26)$$

$$\frac{d\phi_n}{dx}(L) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{d^2 \phi_n}{dx^2}(L) = 0 \quad (8.27)$$

両辺に $\phi_m(x)$ をかけ、0 から L まで積分すると、

$$EI \int_0^L \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} \phi_m(x) dx - \rho A \omega_n^2 \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad (8.28)$$

左辺第1項に対して部分積分を適用する、

$$EI \left[\frac{d^3 \phi_n(x)}{dx^3} \phi_m(x) \right]_0^L - EI \int_0^L \frac{d^3 \phi_n(x)}{dx^3} \frac{d\phi_m(x)}{dx} dx - \rho A \omega_n^2 \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad (8.29)$$

左辺第2項に対して再度部分積分を適用すると、

$$EI \left[\frac{d^3 \phi_n(x)}{dx^3} \phi_m(x) - \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} \frac{d\phi_m(x)}{dx} \right]_0^L + EI \int_0^L \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_m(x)}{dx^2} dx - \rho A \omega_n^2 \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad (8.30)$$

上式の左辺第1項は境界条件によってゼロになるから、

$$EI \int_0^L \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_m(x)}{dx^2} dx = \rho A \omega_n^2 \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx \quad (8.31)$$

を得る。同様の操作を m と n を取り替えて行くと、

$$EI \int_0^L \frac{d^2 \phi_m(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} dx = \rho A \omega_m^2 \int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx \quad (8.32)$$

辺々ひいて、

$$\rho A (\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad (8.33)$$

$n \neq m$ のとき $\omega_n \neq \omega_m$ であるから、

$$\rho A \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad (8.34)$$

$n = m$ のときは上式は成立せず、0でないある値となるから、これを

$$\rho A \int_0^L \phi_n(x) \phi_n(x) dx = \bar{m}_n \quad (8.35)$$

と書く。ここで $\bar{m}_n$ は前節と同様に、**モード質量**と呼ばれる。あるいは上二式をまとめて、したがって、

$$\rho A \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = \bar{m}_n \delta_{nm} \quad (8.36)$$

さらにこれを式 (8.28) または式 (8.31) に代入して次式を得る、

$$EI \int_0^L \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} \phi_m(x) dx = EI \int_0^L \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_m(x)}{dx^2} dx = \omega_n^2 \bar{m}_n \delta_{nm} = \bar{k}_n \delta_{nm} \quad (8.37)$$

ここで $\bar{k}_n$ は**モード剛性**と呼ばれる。

以上、式 (8.36) と式 (8.37) をはりの固有モード関数の**直交性**という。

8.2 自由振動補遺

前章で、自由振動の一般解に含まれる未定定数の求め方を示していなかったが、今回導いたモード関数の直交性を用いることでこれを決定できる。自由振動の一般解は、前章の式 (7.25) で導いたとおり、

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n \cos(\omega_n t - \varphi_n) \quad (8.38)$$

と書ける。ここで a_n, φ_n が未定定数であるが、これらは初期値を満たすように決定することができる、というのが前章の話であった。ではどうするか。

まず、初期条件を

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad (8.39)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad (8.40)$$

と書こう。これに一般解を代入すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n \cos \varphi_n = y_0(x) \quad (8.41)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n \omega_n \sin \varphi_n = v_0(x) \quad (8.42)$$

両辺に ϕ_m を掛けて 0 から L まで積分すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx a_n \cos \varphi_n = \int_0^L y_0(x) \phi_m(x) dx \quad (8.43)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx a_n \omega_n \sin \varphi_n = \int_0^L v_0(x) \phi_m(x) dx \quad (8.44)$$

どちらの式においても、左辺の積分は、固有モード関数の直交性により $n = m$ 以外の項については全てゼロになるから、

$$\bar{m}_m a_m \cos \varphi_m = \int_0^L y_0(x) \phi_m(x) dx \quad (8.45)$$

$$\bar{m}_m a_m \omega_m \sin \varphi_m = \int_0^L v_0(x) \phi_m(x) dx \quad (8.46)$$

上の二式を a_m, φ_m について解いて未定定数を定めることができる。

$$a_m = \frac{1}{\bar{m}_m} \sqrt{\left(\int_0^L y_0 \phi_m dx \right)^2 + \frac{1}{\omega_m^2} \left(\int_0^L v_0 \phi_m dx \right)^2} \quad (8.47)$$

$$\varphi_m = \tan^{-1} \left(\frac{\int_0^L v_0 \phi_m dx}{\omega_m \int_0^L y_0 \phi_m dx} \right) \quad (8.48)$$

はりの曲げ振動の場合も、全く同じ方法で初期条件を満たす未定定数を決定することができる。

8.3 モード解析

固有モード関数の直交性を用いると、離散系の場合と同様に、元の運動方程式を、互いに独立な（連成しない）複数の 1 自由度系の運動方程式に変換することができ、応答解析を楽に行うことができる。以下の議論は、波動方程式に従う系でもはりの曲げ振動でも全く同じように成立するので、ここでははりの曲げ振動を例に説明しよう。

モード解析の手順は第 3 章で述べた離散系の場合と全く同様である：

1. 自由振動問題を解いて、運動方程式と境界条件を満足する固有振動数と固有モード関数を求める。
2. 得られたモード関数を使って座標変換を施し、モード座標系における 1 自由度運動方程式を導く。
3. 個々の 1 自由度運動方程式を個別に解く。
4. 得られた解を使って、物理座標系での解を求める。

モード解析では、解くべき式は1自由度系の運動方程式である。自由振動さえあらかじめ解けていれば、強制振動解析を行う際に運動方程式の構造や境界条件を気にする必要がなく、解を求める作業が著しく簡単になる。また、「連続体であっても、モード毎に分解して見れば1自由度系として理解できる」あるいは「どんなに複雑な系であっても1自由度系の重ね合わせと見なすことができる」という視点は、複雑な振動系の理解を助ける強力なツールになる。ただし、離散系の場合と異なるのは、モードが無限個存在するので、得られる1自由度運動方程式も無限個になるということである。いわば「無限自由度」を有する連続体のダイナミクスを「無限個の」1自由度系に置き換えたということになる。ただし、実用上は有限個数のモード次数までで計算を打ち切ってよいことがほとんどである（**モードの打ち切り（後述）**）。したがって、実質的にモード解析は、連続体を有限自由度の低次元モデルで近似する手段を提供している。

それでは、まず、分布外力が作用する一様な棒の縦振動の運動方程式

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = q(x,t) \quad (8.49)$$

について上記の手順を実行してみよう。ただし上式は、

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad q(x,t) = \frac{1}{\rho A} f(x,t) \quad (8.50)$$

とおいて式(6.5)を書き換えたものである。まず、対応する自由振動問題（同じ境界条件の下で外力項をゼロにしたもの）を解いて、固有振動数と固有モード関数を求めておく。次に、式(8.49)の解を固有モード関数を用いて次のように表す。

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \xi_n(t) \quad (8.51)$$

この表現を**モード展開**という。固有モード関数は与えられた境界条件を満たすように求めたものであるから、上式のようにモード展開することにより、解は自動的に境界条件を満たすことが保証されることに注意しよう。また上式で導入した新しい座標 $\xi_n(t), n = 1, \dots, \infty$ を**規準座標**または**モード座標**という。これと対比する意味で、元の $y(x,t)$ を**物理座標**というのは離散系の場合と同様である。つまり、モード展開は物理座標系からモード座標系への座標変換を表す式である。式(8.51)を運動方程式(8.49)に代入すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \ddot{\xi}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} c^2 \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} \xi_n(t) = q(x,t) \quad (8.52)$$

固有モード関数に対して成立する式(8.8)より、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \left(\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) \right) = q(x,t) \quad (8.53)$$

ここで、両辺に $\phi_m(x)$ を掛けて0から L まで積分すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx \left(\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) \right) = \int_0^L \phi_m(x) q(x,t) dx \quad (8.54)$$

固有モード関数の直交性の式(8.21)より、直ちに、

$$\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) = \frac{1}{\bar{m}_n} \int_0^L \phi_n(x) q(x,t) dx \quad (n = 1, \dots, \infty) \quad (8.55)$$

さらに、 $\bar{f}_n(t) = \int_0^L \phi_n(x) q(x,t) dx$ において、

$$\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) = \frac{1}{\bar{m}_n} \bar{f}_n(t) \quad (n = 1, \dots, \infty) \quad (8.56)$$

これが、モード座標系における運動方程式であり、固有振動数 ω_n を持つ 1 自由度系の運動方程式になっている。この式と、離散系における第 5 章の式 (3.37) との類似性に注意しよう。

はりの場合も全く同様な手順でモード座標系における運動方程式を導くことができる。分布外力が作用する一様なはりの曲げ振動の運動方程式

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = q(x, t) \quad (8.57)$$

について、まず、対応する自由振動問題を解いて固有振動数と固有モード関数を求めておく。式 (8.57) の解を固有モード関数を用いて次のようにモード展開する。

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \xi_n(t) \quad (8.58)$$

固有モード関数は与えられた境界条件を満たすように求めたものであるから、上式のようにモード展開することにより、解は自動的に境界条件を満たす。式 (8.58) を運動方程式 (8.57) に代入すると、

$$\rho A \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \ddot{\xi}_n(t) + EI \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} \xi_n(t) = q(x, t) \quad (8.59)$$

固有モード関数に対して成立する式 (8.23) より、

$$\rho A \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \left(\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) \right) = q(x, t) \quad (8.60)$$

ここで、両辺に $\phi_m(x)$ を掛けて 0 から L まで積分すると、

$$\rho A \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx \left(\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) \right) = \int_0^L \phi_m(x) q(x, t) dx \quad (8.61)$$

固有モード関数の直交性の式 (8.36) より、直ちに、

$$\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) = \frac{1}{\bar{m}_n} \int_0^L \phi_n(x) q(x, t) dx \quad (n = 1, \dots, \infty) \quad (8.62)$$

さらに、 $\bar{f}_n(t) = \int_0^L \phi_n(x) q(x, t) dx$ において、

$$\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) = \frac{1}{\bar{m}_n} \bar{f}_n(t) \quad (n = 1, \dots, \infty) \quad (8.63)$$

これが、モード座標系における運動方程式であり、式 (8.56) と全く同じ式になる。つまり、モード座標系に変換することで、元の運動方程式の形や境界条件に関わらず同じ扱いをすることができる。

ここで、式 (8.56)、式 (8.63) の右辺の外力項に注目しよう。離散系の場合の $\bar{f}_n(t)$ は外力ベクトルとモードシェイプベクトルの内積であったが、連続体の場合も同様に、分布外力と固有モード関数との内積（ただし関数の内積）である。したがってたとえば、外力があるモードの節の付近に分布していたとすると、そのモードに対する $\bar{f}_n(t)$ の振幅は小さくなるため、そのモードはあまり励起されない。逆に、外力がモードの腹の付近に作用する場合は、そのモードは大きく励起される。

極端な場合として、外力が $x = x_f$ の位置に作用する**集中力**の場合を考えよう。すると、分布外力は、

$$q(x, t) = \delta(x - x_f) f(t) \quad (8.64)$$

と表現できる。ここで $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。すると、 n 次モードに対するモード外力は、

$$\bar{f}_n(t) = \int_0^L \phi_n(x) \delta(x - x_f) f(t) dx \quad (8.65)$$

となる。ここでデルタ関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)f(x)dx = f(y) \quad (8.66)$$

を用いると、モード外力は

$$\bar{f}_n(t) = \phi_n(x_f)f(t) \quad (8.67)$$

と計算される。したがって、 n 次モードの運動方程式は次式のようになる。

$$\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) = \frac{\phi_n(x_f)}{\bar{m}_n} f(t) \quad (8.68)$$

よって、もし $x = x_f$ が n 次モードの節、つまり $\phi_n(x_f) = 0$ であれば、 n 次モードはこの集中力によって全く励起されないことになる。

8.4 伝達関数・共振曲線・単位インパルス応答、モードの打ち切り

モード座標系における運動方程式を導いた後は、第5章における離散系の場合と全く同様に、伝達関数や調和加振力に対する共振曲線や単位インパルス応答を求めることは非常に容易い。唯一異なるのは、前述のように、モードの個数が無限個になることである。

たとえば、前述の集中外力の場合に、外力から任意点での応答への伝達関数は次のようになる。

$$G(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\bar{m}_n} \phi_n(x_f) \phi_n(x)}{s^2 + \omega_n^2} \quad (8.69)$$

調和外力の場合の周波数応答関数は、上式で $s = i\omega$ として、

$$G_f(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\bar{m}_n} \phi_n(x_f) \phi_n(x)}{-\omega^2 + \omega_n^2} \quad (8.70)$$

単位インパルス応答は

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_f) \phi_n(x)}{\bar{m}_n \omega_n} \sin \omega_n t \quad (8.71)$$

となる。

ところが、現実的にはモードを無限個評価する必要はないのである。理由は二つある。まず、一つ一つのモードはそれぞれ固有振動数を持っているが、高次モードになるほど固有振動数は高くなる。通常の応用では興味のある振動数の範囲は比較的低い振動数に限られており（たとえば機械振動では 1kHz 以下、構造物振動では 100Hz 以下など）、興味のある振動数帯域から遠く離れた固有振動数を持つモードの影響は相対的に非常に少ない。したがって、通常はある次数以上のモードの影響は無視してよい。もう一つの理由は、上の議論では減衰のことを考慮していないが、一般に高次モードになるほど減衰がよく効き、したがってモードが存在しても実際には過減衰となって励起されない場合が多いためである。この二つに理由により、通常、ある次数以上のモードは無視される。これを**モードの打ち切り**という。モードの打ち切りを行うことによって、本来は無限自由度の連続体を有限次元のシステムとして近似的に取り扱うことができる。

どの程度の次数で打ち切ればよいかは問題に依存するが、通常、数個から多くても十数個で十分である。打ち切ったことによって誤差が発生するが（モードの**打ち切り誤差**という）誤差がなるべく小さくなるように十分考慮しなければならない。たとえば、先ほど求めた集中外力に対する周波数応答関数では、 q 次モードまでで低次元近似された式は

$$\tilde{G}_f(x, \omega) = \sum_{n=1}^q \frac{\frac{1}{\bar{m}_n} \phi_n(x_f) \phi_n(x)}{-\omega^2 + \omega_n^2} \quad (8.72)$$

打ち切り誤差は,

$$E_f(x, \omega) = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\bar{m}_n} \phi_n(x_f) \phi_n(x)}{-\omega^2 + \omega_n^2} \quad (8.73)$$

である。特に振動のアクティブ制御を行う場合、打ち切った高次モードの影響で制御系が不安定になることがあり (**スピルオーバー不安定**)、注意が必要である。

モードの打ち切り誤差の影響を緩和するため、低次元近似式 (8.72) 多少の修正を行うことがある。興味のある振動数帯域の上限に対して、打ち切ったモードの固有振動数 $\omega_{q+1}, \omega_{q+2}, \dots$ が十分大きいとすると、打ち切り誤差の式 (8.73) において $\omega \ll \omega_n$ 。したがって、打ち切り誤差を

$$E_f(x, \omega) \simeq \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_f) \phi_n(x)}{\bar{m}_n \omega_n^2} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_f) \phi_n(x)}{\bar{k}_n} \quad (8.74)$$

と近似的に評価できる。これは振動数に依存しないので、これを $D(x)$ とおいて、低次元近似式の方に繰り入れると、修正された低次元近似式を得る。

$$\tilde{G}_f(x, \omega) = \sum_{n=1}^q \frac{\frac{1}{\bar{m}_n} \phi_n(x_f) \phi_n(x)}{-\omega^2 + \omega_n^2} + D(x) \quad (8.75)$$

$D(x)$ を**剰余コンプライアンス**、その逆数を**剰余剛性**と呼ぶ。その具体的な値を計算によって求めることはできないので (できるならモードを打ち切る意味が半減する) 実験を実施して、実験結果に合うように定めるのが通常である。

逆に、低次側のモード (1 次～ p 次) を省略した場合、その影響による打ち切り誤差は、

$$E_f(x, \omega) = \sum_{n=1}^p \frac{\frac{1}{\bar{m}_n} \phi_n(x_f) \phi_n(x)}{-\omega^2 + \omega_n^2} \quad (8.76)$$

興味のある振動数帯域の下限に対して、打ち切ったモードの固有振動数 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ が十分小さいとすると、打ち切り誤差の式 (8.76) において $\omega \gg \omega_n$ 。したがって、打ち切り誤差を

$$E_f(x, \omega) \simeq -\frac{1}{\omega^2} \sum_{n=1}^p \frac{\phi_n(x_f) \phi_n(x)}{\bar{m}_n} \quad (8.77)$$

と近似的に評価し、これを $C(x)/\omega^2$ とおいて、 $C(x)$ を**慣性拘束**、その逆数を**剰余質量**と呼ぶ。これを近似式に繰り入れて、再度修正された低次元近似式を得る。

$$\tilde{G}_f(x, \omega) = \sum_{n=p}^q \frac{\frac{1}{\bar{m}_n} \phi_n(x_f) \phi_n(x)}{-\omega^2 + \omega_n^2} + \frac{C(x)}{\omega^2} + D(x) \quad (8.78)$$

第9章

制振デバイス（3）：連続体の制振

この講義の最終章となる本章では、おもに連続体の制振に関するトピックとして、動吸振器による制振と拘束層ダンピングについて概説する。

9.1 動吸振器によるはりの曲げ振動の制振

図 9.1 に示すように、はりの一点に減衰型動吸振器を取り付けて、はりの曲げ振動を抑制することを考えよう。ここで図では片持ちはりを示しているが、以下の議論ではモード解析を適用するため、はりの境界条件はどのようなものであってもよい。

第 6 章で述べたように、減衰型動吸振器は、主系の固有振動数に同調させて共振ピークを可能な限り下げられるように設計される。主系が多自由度系や連続体の場合、主系は複数の固有振動数を持つ。全ての共振ピークに同調させた設計などできないので、どれか一つのモードを選択して、そのモードの共振ピークを下げるよう設計をする。対象モードの選び方は問題に依存するが、卓越的なモード、つまり共振ピークが最も高いモードを選択するのが普通である。たいていは 1 次モードが選ばれる。

図 9.1 の系の運動方程式は次のようになる。

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = \delta(x - x_a) \{c(\dot{z}(t) - \dot{y}_a(t)) + k(z(t) - y_a(t))\} + q(x, t) \quad (9.1)$$

$$m\ddot{z}(t) + c(\dot{z}(t) - \dot{y}_a(t)) + k(z(t) - y_a(t)) = 0 \quad (9.2)$$

はりに対してモード解析を適用して上式を解いていく。まず、はり単体の固有振動数と固有モード関数を求め、式 (9.1) をモード座標系で表す。8.3 節で述べた手順を踏むと次式を得る。

$$\bar{m}_n \ddot{\xi}_n(t) + \bar{k}_n \xi_n(t) = \phi_n(x_a) c \left\{ \dot{z}(t) - \sum_n \phi_n(x_a) \dot{\xi}_n(t) \right\} + \phi_n(x_a) k \left\{ z(t) - \sum_n \phi_n(x_a) \xi_n(t) \right\} + \bar{f}_n(t) \quad (9.3)$$

($n = 1, \dots, \infty$)

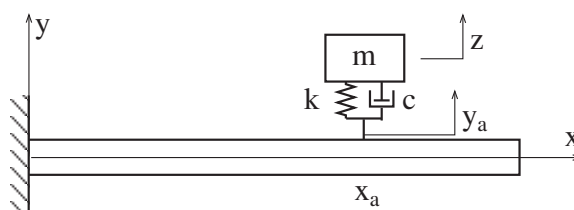
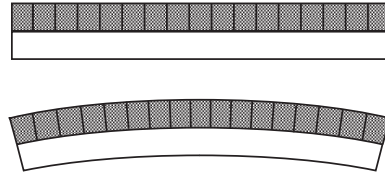
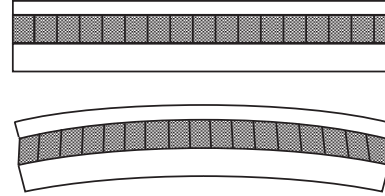


Fig. 9.1 動吸振器を取り付けたはり



(a) 非拘束層ダンピング処理



(b) 拘束層ダンピング処理

Fig. 9.2 分布的ダンピングの付加（グレー領域がダンピング層）

ただし $\bar{f}_n(t) = \int_0^L \phi_n(x)q(x,t)dx$ である．次に式 (9.2) に含まれる y_a もモード展開して,

$$m\ddot{z}(t) + c \left\{ \dot{z}(t) - \sum_n \phi_n(x_a) \dot{\xi}_n(t) \right\} + k \left\{ z(t) - \sum_n \phi_n(x_a) \xi_n(t) \right\} = 0 \quad (9.4)$$

ここで n 次モードを制振対象に選んだとする．動吸振器の設計においては対象モードの共振振動数近傍での特性が重要であるが, このような共振ピークの近傍では, 他のモードの影響は比較的少ないため, ここでは n 次モード以外の項を無視することにする．さらに式を整理すると, n 次共振ピーク近傍のダイナミクスを表す次の近似表現を得る．

$$\bar{m}_n \ddot{\xi}_n(t) + \bar{k}_n \xi_n(t) + \phi_n(x_a) c \left\{ \phi_n(x_a) \dot{\xi}_n(t) - \dot{z}(t) \right\} + \phi_n(x_a) k \left\{ \phi_n(x_a) \xi_n(t) - z(t) \right\} = \bar{f}_n(t) \quad (9.5)$$

$$m\ddot{z}(t) + c \left\{ \dot{z}(t) - \phi_n(x_a) \dot{\xi}_n(t) \right\} + k \left\{ z(t) - \phi_n(x_a) \xi_n(t) \right\} = 0 \quad (9.6)$$

上式は第5章で求めた主系-動吸振器系の運動方程式 (5.11) と類似していることに注目しよう．特に, はりの固有モード関数が動吸振器の取り付け点において1になるように, すなわち $\phi_n(x_a) = 1$ になるように正規化したとすると, 上式は式 (5.11) と同じ形式になる．したがって, 5.5 節で展開した動吸振器の最適調整を適用することができる．

9.2 拘束層ダンピング

動吸振器やその他のダンパは, 集中的な減衰を持つ装置を連続体に対して離散的に取り付けるものであるが, これとは別の考え方として, 連続体に対して分布的な減衰要素を付加することも考えられる．

図 9.2 は, はりや平板など曲げを受ける薄肉構造に対して, 構造の表面に粘弾性体などのダンピング材料の層を張り付けることによって大きな減衰を付与するための代表的な二つの方法を示している．ここでのポイントは, 付加されたダンピング材料ができるだけ大きな変形と大きな抵抗力を発現し, 1 周期の振動の間にエネルギーをできるだけ多く消散するように工夫することである．

図 9.2(a) の方法は**非拘束層ダンピング処理** (unconstrained layer damping treatment) と呼ばれる．この方法ではダンピング層は単純に板の表面に貼付される．板が曲げ変形を受けると, ダンピング層には引張り-圧縮ひずみ

が発生する。設計が比較的容易く、複雑な形状の表面にも適用しやすい。その半面、満足のいくダンピング性能を出すには十分な厚さのダンピング層が必要である。設計式としては Oberst の式が知られている、

Oberst の式は、全面が非拘束層ダンピング処理されたはりの等価な複素曲げ剛性 $(EI)^*$ を求める式である。複素剛性とは粘弾性体など内部減衰作用を持つ材料のばね作用および減衰作用を表すパラメータであり、実部が剛性を、虚部が減衰を表す。虚部を実部で割った比は**損失係数**と呼ばれ、減衰比と同じように減衰の効き方を表すパラメータになる。

$$\frac{(EI)^*}{E_1 I_1} = 1 + e^* h^3 + 3(1 + h)^2 \frac{e^* h}{1 + e^* h} \quad (9.7)$$

ここで、 E_1, I_1 は基層となるはりの縦弾性係数と断面 2 次モーメント、 $h = H_2/H_1$ 、 $e^* = E_2^*/E_1$ 、 H_1, H_2 は基層とダンピング層の厚さ、 E_2^* はダンピング層の複素縦弾性係数である。

上式から非拘束層ダンピング処理された 2 層構造のはりの損失係数を求めると、 $h = 2$ 程度までは h に対して単調に増加するが、 $h = 2$ を超える範囲ではほとんど増加しなくなることがわかる。つまり、 $h = 2$ を超える厚さのダンピング層の付加は重量と材料コストの観点から無意味である。

図 9.2(b) の方法は**拘束層ダンピング処理** (constrained layer damping treatment) と呼ばれる。この場合、ダンピング層はさらにもう一層の弾性層 (拘束層と呼ばれる) で覆われる。拘束層の剛性はダンピング層に比較して十分大きいことが必要である。この方法では元の板と拘束層は独立に変形しようとする。したがってダンピング層は大きなせん断ひずみを受けることになる。ダンピング材料の単位重量あたりの減衰効果は非拘束層ダンピングに比べてはるかに大きく、薄いダンピング層の付加で大きなダンピング効果を得ることができる。ただし解析は簡単ではなく、複雑な形状の解析には有限要素法が用いられる。単純な曲げ変形の場合は近似式として Ross-Kerwin-Ungar の式 (RKU の式) が知られている。また、複雑な形状の表面には適用しにくいとされる。ただし、現在では鋼板の間に薄い樹脂層を挟んだ**制振鋼板**が市販されており、プレス加工、曲げ加工、溶接も可能であるため、製作上の問題は少なくなっている。

Ross-Kerwin-Ungar の式は、図 9.2(b) のような 3 層構造 (基層/ダンピング層/拘束層) を持つ幅 b のはりが、半波長 λ_h の正弦波形状で振動しているという仮定の下で、はりの等価な複素曲げ剛性 $(EI)^*$ を求める式である。

$$\begin{aligned} \frac{(EI)^*}{b} = & \frac{E_1 H_1^3}{12} + \frac{E_2^* H_2^3}{12} + \frac{E_3 H_3^3}{12} - \frac{E_2^* H_2^2}{12} \left(\frac{H_{31} - D}{1 + g^*} \right) \\ & + E_1 H_1 D^2 + E_2^* H_2 (H_{21} - D)^2 + E_3 H_3 (H_{31} - D)^2 \\ & - \left[\frac{E_2^* H_2}{2} (H_{21} - D) + E_3 H_3 (H_{31} - D) \right] \left(\frac{H_{31} - D}{1 + g^*} \right) \end{aligned} \quad (9.8)$$

ここで、

$$D = \frac{E_2^* H_2 (H_{21} - H_{31}/2) + g^* (E_2^* H_2 H_{21} + E_3 H_3 H_{31})}{E_1 H_1 + E_2 H_2/2 + g^* (E_1 H_1 + E_2 H_2 + E_3 H_3)} \quad (9.9)$$

$$H_{21} = \frac{H_1 + H_2}{2} \quad (9.10)$$

$$H_{31} = H_2 + \frac{H_1 + H_3}{2} \quad (9.11)$$

$$g^* = \frac{G_2^* \lambda_h^2}{E_3 H_2 H_3 \pi^2} \quad (9.12)$$

ここで、 E_1, E_3 は基層と拘束層の縦弾性係数、 H_1, H_2, H_3 は基層、ダンピング層、拘束層の厚さ、 E_2^*, G_2^* はダンピング層の複素縦弾性係数と複素横弾性係数、 E_2 は E_2^* の実部である。上式は、 $H_3 \rightarrow 0$ で Oberst の式に帰着する。

D は 3 層はりの中立軸の位置を表している。最も重要なパラメータはせん断パラメータ g^* であり、拘束層ダンピング処理された 3 層構造の剛性と減衰特性を大きく支配する。 g^* の実部 g については大きすぎても小さすぎてもよくなく、 $g = 1$ の近傍で最大の減衰効果が得られる。

(参考図書) David I. G. Jones 著、鈴木浩平 監訳、粘弾性ダンピング技術ハンドブック、丸善、2003。

第10章

連続体の振動（4）：波動

これまでの章で幾度となく「波動方程式」という言葉を使ってきたが、「波動」について言及したことはなかった。この章では波動方程式の進行波解やはりの曲げ波動について述べ、「波動」とこれまで述べてきた「振動」との関連について解説する。

10.1 波動方程式の波動解

10.1.1 無限長の棒や弦の一般解

これまでの解析では、有限な長さの1次元状の物体（棒や弦など）の振動を考えるために、1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (10.1)$$

に境界条件を付け加えて、両者を満たす解、すなわち固有振動数と固有モード関数を求めた。再度流れをまとめると、まず、波動方程式を満たすためには振動数と波数（波長の逆数）の間に $\omega = ck$ の関係が成り立つ必要がある。次に、与えられた境界条件を満たすためには振幅分布の波長と物体の長さの間に特定の関係が成立しなければならず、その結果、波数、さらには波数と $\omega = ck$ なる関係にある振動数は特定の飛び飛びの値しかとり得ない、この許容された振動数が固有振動数に他ならない、という話であった。

ここでは一転して、無限の長さの様な棒や弦などの物体を考える。すると、一点に加えられた擾乱の影響は波となって次々に遠方に伝播し、決して戻ってくることはない。つまりこのような状況においては、物体には波動的性質が顕著に現れる。

では、どのような伝播の仕方をするのか。そこで、境界条件の制約がない状態で波動方程式 (10.1) の解を考えると、直ちに次の形の一般解を得る。

$$y(x, t) = f_1(ct - x) + f_2(ct + x) \quad (10.2)$$

ここで f_1, f_2 は2階微分可能な任意の関数である。これが実際に解であることは、波動方程式に代入してみれば明らかである。この解はどのような解か？そこで式 (10.2) を次のように書き換える。

$$y(x, t) = f_1(-(x - ct)) + f_2(x + ct) \quad (10.3)$$

すると、時刻 $t = 0$ では

$$y(x, 0) = f_1(-x) + f_2(x) \quad (10.4)$$

で表される波の形が、時刻 $t = \Delta t$ には

$$y(x, \Delta t) = f_1(-(x - c\Delta t)) + f_2(x + c\Delta t) \quad (10.5)$$

すなわち第1項は x 軸の正方向に $c\Delta t$, 第2項は x 軸の負方向に $c\Delta t$ だけ平行移動していることがわかる. つまりこの解は, 形を変えずに速度 c で物体上を伝播する波を表していることがわかる. 第1項は正方向に, 第2項は負方向に伝播する任意形状の波であり, それらの重ね合わせが, 1次元波動方程式に支配される無限長物体の応答を表す一般解である, というのが式 (10.2) の意味するところである.

式 (10.2) の表現は「任意の」関数 f_1, f_2 を含むため, 波の波長や振動数の関係を調べるには不向きである. そこで次に, 時間について調和的に変動する波について考えてみよう. すなわち, 波動方程式の解を

$$y(x, t) = Y(x) e^{i\omega t} \quad (10.6)$$

とおいてみる. この形は, 第7章で自由振動解を求めたときの仮定と同じであり, $Y(x)$ は振幅の空間分布である. これを波動方程式に代入すると, 第9章で導いたときと同様に, $Y(x)$ が満たすべき次の微分方程式を得る.

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + k^2 Y(x) = 0 \quad (10.7)$$

ただし

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (10.8)$$

この式の基本解は

$$Y(x) = e^{\pm i k x} \quad (10.9)$$

となって, これらを線形結合したものが一般解である. ここで, 有限長さの場合は境界条件を満たすための条件から許容される k の値がとびとびの値に決まったが, 今は境界条件を考えないため, k の値に制約はないことに注意しよう.

式 (10.9) を式 (10.6) に戻すと, 調和的な波動解として次式を得る.

$$y(x, t) = e^{i(\omega t \pm k x)} \quad (10.10)$$

波数と振動数の関係式 (10.8) を考慮すると

$$y(x, t) = e^{i k (c t \pm x)} \quad (10.11)$$

を得る. これは x 軸に沿って正方向または負方向に一定速度 c で動く正弦波を表している.

10.1.2 波の反射と定在波

次に, $x = 0$ の位置に固定端があるとき, $x < 0$ の半無限領域を正の方向に進んできた波がどのようなか考えてみよう. この場合は固定端で波が反射されるが, $x = 0$ においては $y(0, t) = 0$ という固定端の境界条件を満たさなければならない. このような解を得るためには次のように考える. すなわち, まずいったん固定端の存在を忘れて, 媒質は無限に続いていると考える. その上で固定端の存在を表現するために, 正の方向に進む実際の波 $f_1(ct - x)$ に対して, 仮想的な波 $-f_1(ct + x)$ を考えてこれを加えるのである. 波 $f_1(ct - x)$ と波 $-f_1(ct + x)$ は点 $x = 0$ に関して点対称だから, 両者の和は $x = 0$ で常にゼロになり, 境界条件を自動的に満足する. 正の方向に進む波 $f_1(ct - x)$ に対して, $-f_1(ct + x)$ は負の方向に進む波であるからこれが固定端での反射波である. 固定端の境界条件を満たすために反射波は符号が反転することに注意しよう. このような考え方で境界条件を満足させる方法を**鏡像の方法**という.

鏡像の方法は自由端の場合にも有効である. 自由端においては y の空間勾配がゼロでなければならないが, この条件を満たすためには, 正方向に進む波 $f_1(ct - x)$ に対して反射波 $f_1(ct + x)$ を加えてやればよい. つまり自由端における反射では符号は反転しない.

次に調和的な波 (すなわち正方向に移動する正弦波) が固定端または自由端で反射されるときどのような現象が起こるか考えよう. これは上述の $f_1(ct - x)$ が $e^{i k (c t - x)}$ である特別な場合であるから, 固定端の場合の反射波

は $-e^{ik(ct+x)}$, 自由端の場合の反射波は $e^{ik(ct+x)}$ ということになる. したがって $x \leq 0$ における変形は, 固定端の場合,

$$y(x, t) = e^{ik(ct-x)} - e^{ik(ct+x)} = e^{i\omega t} (e^{-ikx} - e^{ikx}) = -2ie^{i\omega t} \sin kx \quad (10.12)$$

自由端の場合,

$$y(x, t) = e^{ik(ct-x)} + e^{ik(ct+x)} = e^{i\omega t} (e^{-ikx} + e^{ikx}) = 2e^{i\omega t} \cos kx \quad (10.13)$$

となる. ここで重要なことは, 得られた解はもはや進行波の形ではないということである. 振幅の空間分布は $\sin kx$ または $\cos kx$ のように空間に対して固定され, 節や腹の位置は移動しない. このように, 向きが逆の二つの波が重なった結果生じた空間的に動かない振動パターンのことを **定在波** という. 固定端や自由端のような全反射境界がある場所では定在波が立つ.

10.1.3 定在波と固有モード関数

それでは, もう一つ反対側にも境界がある場合はどうなるだろうか. この場合は結局, 棒や弦の長さが有限長であるということだから, 第9章で見たように許容される波数は飛び飛びの値しか取り得ず, 対応する固有モードが存在する. ここではこのことを波動の観点から考察してみよう.

前述のように, 進行する正弦波が固定端または自由端に到達すると, その境界での境界条件を満たすように反射が起こり, 結果として定在波が立つ. 例として両端固定の場合を考えよう. たとえば正方向に進む正弦波が右端に到達して反射されると, 右端に節を持つ定在波が立つ. ところがこの反射波は次に左端の境界に到達して再び反射されるため, 左端でも節を持つような定在波が立たなければならない.

右端で節を持つように生起された定在波がちょうど左端でも節になるような場合, すなわち波長 λ が物体の全長 L に対して $L = n\lambda/2$ となる場合, 両端での反射によって生成される定在波同士の位相が揃うために, このような振動は持続しうる. しかしそれ以外の波長の波は, 定在波同士の位相が一致しないため互いに矛盾することとなり, 存在し得ない.

定在波の波長は波数 k で決まる (つまり振動数 ω で決まる) ため, 波数および振動数は, 両端での境界条件に適合するために飛び飛びの値しか取れないことになる. この振動数が 固有振動数 である. そして, このような特別な場合における存在可能な定在波が 固有モード関数 である.

調和的な強制振動の場合には, 加振点から発生する正弦波動は両端で反射を繰り返すが, $L = n\lambda/2$ となる場合, 両端で生起される定在波の位相が一致して互いに強め合うため, 波が両端で反射を繰り返すうちに振幅がどんどん成長していく. つまり, 共振 する. それ以外の波長の波は, 定在波同士が互いに強め合うことはないため振幅は有限値に留まる.

10.2 はりの曲げ波動と分散性

10.2.1 はりの曲げ波動の解

今度は, 一樣なはりの曲げ振動の運動方程式

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = 0 \quad (10.14)$$

についても, 同じように境界条件を取り外してみよう. すなわち無限長のはりを考えるわけである. この場合も同じような波動解が得られるだろうか.

そこで先ほどと同様に, 解を

$$y(x, t) = Y(x) e^{i\omega t} \quad (10.15)$$

と試みる。これを式 (10.14) に代入すると、第 9 章で自由振動解を導いたときと同様に、 $Y(x)$ が満たすべき次の微分方程式を得る。

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} + k^4 Y(x) = 0 \quad (10.16)$$

ただし

$$k^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \quad (10.17)$$

この式の基本解は

$$Y(x) = e^{\pm kx}, e^{\pm ikx} \quad (10.18)$$

となって、これらを線形結合したものが一般解である。

式 (10.18) を式 (10.15) に戻すと、調和的な解として次の二種類を得る。

$$y(x, t) = e^{\pm kx} e^{i\omega t} \quad (10.19)$$

$$y(x, t) = e^{i(\omega t \pm kx)} \quad (10.20)$$

式 (10.19) の解は、振幅分布が指数関数で与えられる調和振動解であって波動ではない。この解のことを、**ニアフィールド**、**リングング**、または**エバネッセントモード**などという。

これに対して式 (10.20) は、はりを伝播する進行波解を表している。なぜなら、時刻 $t = 0$ では

$$y(x, 0) = e^{\pm ikx} \quad (10.21)$$

で表される波の形が、時刻 $t = \Delta t$ には

$$y(x, \Delta t) = e^{\pm ik(x \pm \frac{\omega}{k} \Delta t)} \quad (10.22)$$

だけ平行移動しているからである。

10.2.2 波動の分散性

ここで極めて重要なことは、式 (10.20) で表されるはりの進行波解においては、

波の伝播速度は振動数に依存して変化する

ということである。なぜなら、式 (10.22) によると速度は

$$c_p = \frac{\omega}{k} \quad (10.23)$$

であるが、これに式 (10.17) を代入すると、

$$c_p = \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega} \quad (10.24)$$

と計算できて、速度は振動数に対して単調増加である。波動方程式の場合は k と ω が比例するため、速度は振動数 ω に関わらず一定値であったことと対照的である。

このことは何を意味するだろうか。式 (10.20) のような単一振動数の調和波動では、単にその振動数に対応する速度で波が伝播するだけである。しかし一般的には、波の形は複数の振動数成分から構成され、それぞれの振動数成分が異なる速度で伝播するため、波の形が伝播と共に崩れていくのである。波動方程式では、波は形を保ったまま伝播するが、はりの場合には伝播と共に波の形が変化していく。このような波動の性質を**分散性**という。分散性は、波数と振動数が比例しない媒質に見られる性質である。式 (10.17) に表されるような波数と振動数の関係 $k = k(\omega)$ は、ある媒質における波の伝播速度の振動数依存性を決定づける本質的な関係式であり、**分散関数**と呼ばれる。

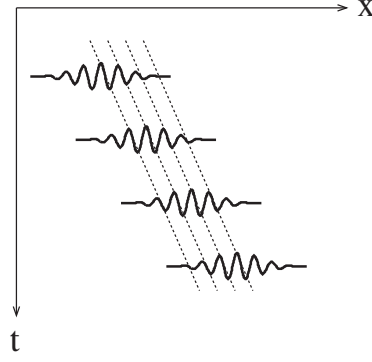


Fig. 10.1 波束の伝播

ところで、式 (10.23) で表される速度は**位相速度**と呼ばれる速度で、波の山谷が移動する速度である。しかし、より物理的に重要なのは、次式で定義される**群速度**である。

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (10.25)$$

はりの場合は、これに式 (10.17) を代入して、

$$c_g = 2 \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega} = 2c_p \quad (10.26)$$

となって、位相速度の2倍である。群速度は振幅分布が移動する速度であり、波によってエネルギーが運搬される速度である。波による情報伝達の速度といってもいい。たとえばある点で突然振幅が増加したとき、その振幅増加は波動に乗って遠方に伝達されるが、その「振幅が増えたという情報」は位相速度ではなく群速度で伝達される。媒質によっては極端な場合、位相速度が光速を超えることもあり得るが、現実の物理系において群速度が光速を上回することは決していない。

やや進んだ内容になるが、振幅分布が位相速度ではなく群速度で伝達されることを簡単に示しておこう。図 10.1 に示すような、ある時刻に空間内のある一点に局在した波の固まりを**波束**というが、原点 $x = 0$ で、この点を正方向に通過する波束を観測したとすれば、その時間波形は次のように書けるだろう。

$$y(0, t) = h(t)e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega \quad (10.27)$$

ここで ω_0 は波束の中心周波数、 $h(t)$ は波束の振幅包絡線、 $\hat{h}(\omega)$ はそのフーリエ変換、上式の右辺は波束の式を逆フーリエ変換公式で表現したものである。 $h(t)$ はある時刻近傍に局在した滑らかな正関数で、典型的な例はガウス関数である。するとそのフーリエ変換は周波数領域でもやはり局在的であり（ガウス関数のフーリエ変換はガウス関数）、したがって $\hat{h}(\omega - \omega_0)$ は $\omega = \omega_0$ の近傍に局在した形となる。よって式 (10.27) 右辺は、波束が $\omega = \omega_0$ 近傍の周波数成分だけで構成されていることを表している。

さてこの表現を用いると、任意の場所における波束の式は、式 (10.20) を考慮して

$$y(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega - \omega_0) e^{i\{\omega t - k(\omega)x\}} d\omega \quad (10.28)$$

と書ける。いま上式右辺の積分は $\omega = \omega_0$ 近傍でのみ評価すればよいことを考慮して、 $k(\omega)$ を $\omega = \omega_0$ 近傍で展開して1次近似する。

$$k(\omega) = k(\omega_0) + k'(\omega_0)(\omega - \omega_0) \quad (10.29)$$

ここで k' は k の導関数である。これを式 (10.28) に代入して計算すると、

$$\begin{aligned}
y(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega - \omega_0) e^{i\{\omega t - k(\omega_0)x - k'(\omega_0)(\omega - \omega_0)x\}} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega - \omega_0) e^{i\{\omega_0 t - \omega_0 t + \omega t - k(\omega_0)x - k'(\omega_0)(\omega - \omega_0)x\}} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{i\{\omega_0 t - k(\omega_0)x\}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega - \omega_0) e^{i\{(\omega - \omega_0)(t - k'(\omega_0)x)\}} d\omega \\
&= h(t - k'(\omega_0)x) e^{i\{\omega_0 t - k(\omega_0)x\}}
\end{aligned} \tag{10.30}$$

となる。

上式右辺は振幅×振動因子の形になっているが、よく見るとそれぞれが異なる速度で移動することがわかる。まず振動因子については引数が $\omega_0 t - k(\omega_0)x$ となっており、したがってこれは速度 $\omega_0/k(\omega_0)$ 、すなわち $\omega = \omega_0$ における位相速度 $c_p(\omega_0)$ で正方向に伝播する正弦波である。よって波束に含まれる個々の波の山谷は位相速度で移動する。

いっぽう、振幅については引数が $t - k'(\omega_0)x$ となっており、したがってこれは速度 $1/k'(\omega_0)$ 、すなわち $\omega = \omega_0$ における群速度 $c_g(\omega_0)$ で正方向に伝播することがわかる。よって波束全体は群速度で移動する。

はりの場合、群速度は位相速度の2倍であるので、はりを伝播する波束の挙動を観察すると、群速度で移動する波束に対して、個々の波はあたかも波束の前方から発生して後方で消えるように見える。

最後にもう一点だけ注意しておこう。はりの位相速度の式 (10.24) と群速度の式 (10.26) を見ると、いずれも振動数に対して単調増加である。これは極めて振動数の高い波はほとんど無限大の速度で伝播するということであり、現実には反する。実はこのことは、元々のはりの運動方程式（オイラー・ベルヌーイの式）の適用限界を示しており、運動方程式の導出過程を仮定を精査すればわかるように、オイラー・ベルヌーイの式は低振動数域のみ有効な近似式なのである。振動数が高くなると、オイラー・ベルヌーイの式の導出過程で無視したせん断変形と回転慣性の影響が顕著になるため、オイラー・ベルヌーイの式は現実には合わなくなる。このことを修正するためにせん断変形と回転慣性の影響を取り入れたはりのモデルを**ティモシェンコはり**というが、ティモシェンコはりの運動方程式から導いた位相速度と群速度は高振動数領域で飽和し、無限大に発散することはない。

10.3 振動と波動

第7章、第8章において、連続体の振動は固有モードという振幅が空間的に固定された波形（つまり定在波）の重ね合わせとして表現された。いっぽう本章においては、空間を伝播する波動が境界で多重反射され折り重なったものが観測される応答である、という新しい描像を得た。これら二つの観点は同じ現象を違う立場で眺めているに過ぎず、物理的には全く等価である。

異なる方向に伝播する波動が折り重なったものが観測される振動応答であるのなら、逆に振動応答を波動成分に分解することはできるだろうか。答えはイエスであって、以下に述べるテクニックを使って振動応答から波動成分を抽出することにより、対象物の動特性を理解する上での新しい視点を得ることができる。

以下の議論では、媒質は分散性を持っていてもよいが、その分散関数は既知であるとする。また単一振動数の調和応答を扱うが、一般的な応答であってもフーリエ解析によって複数の振動数成分に分解することができるので、容易く適用可能である。

棒やはりなど1次元物体上の隣接する二点 $x = x_1$ と $x = x_2$ ($x_1 < x_2$) において振動応答を観測したとして、それらを $y_1(t)$, $y_2(t)$ とおこう。これらの応答はそれぞれの点を通過する正方向の波動と負方向の波動の重ね合わせであるとして、次のように書く。

$$y_1(t) = y_+(x_1, t) + y_-(x_1, t) \tag{10.31}$$

$$y_2(t) = y_+(x_2, t) + y_-(x_2, t) \tag{10.32}$$

ここで y_+ , y_- はそれぞれ正方向, 負方向に伝播する波動成分である. 二点間の距離を Δx とすると, x_1 を通過した正方向の波は Δx の距離を伝播して x_2 に至り, 逆に x_2 を通過した正方向の波は Δx の距離を伝播して x_1 に至るので, x_1 を通過する各波動成分を

$$y_+(x_1, t) = Y_+ e^{i\omega t} \quad (10.33)$$

$$y_-(x_1, t) = Y_+ e^{i\omega t} \quad (10.34)$$

とおくと, 次式が成り立つ.

$$y_+(x_2, t) = Y_+ e^{i(\omega t - k\Delta x)} \quad (10.35)$$

$$y_-(x_2, t) = Y_+ e^{i(\omega t + k\Delta x)} \quad (10.36)$$

式 (10.33)~式 (10.36) を式 (10.31), 式 (10.32) に代入してまとめると,

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik\Delta x} & e^{ik\Delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_+ \\ Y_- \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (10.37)$$

となる. 上式の行列は正則だから左から逆行列をかけると次式を得る.

$$\begin{bmatrix} Y_+ \\ Y_- \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik\Delta x} & e^{ik\Delta x} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad (10.38)$$

上式によって, 二点での振動応答を用いて, 二方向に伝播する波動成分を分離することができる.

ここでは二点の観測値を用いたが, 耐雑音性能を向上させるために三点以上の観測値を用いることもできる. その際には式 (10.37) に相当する式は縦長の長方形行列を含む式になる (未知数の数より式の数の数が多い) ので, 最小自乗法によって解く. このようにいくつかのセンサを空間的に配列したものを**センサアレイ**という.