

講義ノート

機械力学II及び演習

2019年度版

増田 新

京都工芸繊維大学

第1章

1 自由度系の自由振動

振動する系の中で最も単純かつ基本的なものは、線形1自由度系である。その中でも、1自由度系の自由振動は、振動系のダイナミクスの理解の基盤となるものであり、今後、1自由度系の強制振動、2自由度系、多自由度系、さらには連続体の振動へと学習を進めていく上での基礎をなす。1自由度系の自由振動について学んだことは、これらのより複雑な振動系のダイナミクスを理解する上で「直接的に」役立つ。1自由度系の自由振動については既に機械力学I及び演習で学んでいることと思うが、何となく釈然としない印象を持っている者もいるかと思う。今が復習のいい機会なので、本講義の導入としてこれをざっと見直してみよう。

1.1 力学モデル

これから振動する機械や構造物などについて解析を行っていくわけだが、まずは解析したい対象物をできるだけ単純化、理想化して、力学的、数学的に扱いやすい形式に翻訳するプロセスを経る必要がある。これをモデル化という。単純化の程度が大きいくほど、当然扱いやすいが、現実の対象物とモデルとの乖離、すなわち「モデル化誤差」の影響が無視できなくなる危険性がある。しかしだからといって、対象物に忠実で、ありのままを再現したモデルが優れているということにはならない。忠実度を上げすぎたモデルは複雑すぎて、手も足も出ないという可能性がある。また、詳細さと引き替えに一般性を失ってしまい、そこから得た知見を他の現象の理解に流用することができないという弊害もある。要は、どのような詳細度で現象を理解したいか、どのくらいの一般性を持たせたいか、扱いをどの程度簡単にしたいか、のバランスである。

モデル化するためにはまず、対象とする現象のうち、どの範囲を扱いたいかを規定する。この線引きは解析者の仕事である。たとえば、エンジンの振動を解析したい場合、弁の過渡応答だけを見たいのか、クランクシャフトのねじり振動に興味があるのか、エンジンから車体に伝達される振動に興味があるのか、はたまた、エンジンの発する音に興味があるのかによって、モデルの内部に取り込むべき範囲やそれらをモデル化の際の詳細度はさまざまである。たとえば、クランクシャフトのねじり振動では、クランクシャフトをねじりを受ける弾性棒としてモデル化し、ピストンからコンロッドを通じて与えられる力を系の外から作用するトルクとして扱うのが最も簡単であろう。一方、エンジンから車体に伝達される振動に興味がある場合、エンジン自身は剛体または単に質点としてモデル化されるであろう。

線引きした範囲の内部を系という。そして系の外側から作用して、系の内部状態に無関係に系を駆動する力を外力という。もし系の内部状態に依存する力が作用する場合には、その力も含めて系の境界を設定すべきである。たとえば先のクランクシャフトの例では、単純なねじり棒のモデルではクランク回転角に依存した幾何学的非線形性による駆動トルクの変動を表現できないので、それに興味がある場合には、詳細度を上げてクランクとコンロッドの幾何特性を系に含める必要がある。

良いモデルとは、解析したい現象を再現できる最も簡単なモデルである。どこまでを系の内部に取り込み、どこまでモデルの詳細度を上げれば問題の現象を説明できるか、ここで解析者のセンスが問われる。もっとも実際

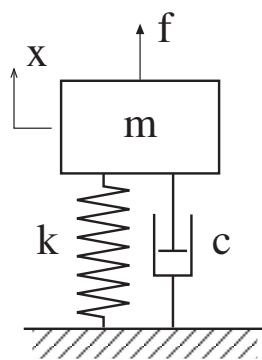


Fig. 1.1 1 質点並進振動系

には試行錯誤的にいろいろなモデルを試してみたり，異なる詳細度のモデルを併用したりすることも多々ある．経験的には，最初に試すモデルは思いきって単純化したほうがよいようである．これから述べる線形 1 自由度系はモデルとしては最も基本的であり，現実の現象を表すには単純すぎると思われるかもしれないが，これでも十分通用する場面は多々ある．

1.2 運動方程式

図 1.1 のように，ばね，ダッシュポット，質点で構成される 1 自由度並進振動系を考える．質点とはある質量を持ち，大きさを考えない物体のことである．釣り合い位置からの変位を x とすると，この質点の位置は変位 x で規定されるから，これは 1 自由度系である．運動方程式は次式ようになる．

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (1.1)$$

ここで， f は外部から質点に作用する外力， m は質点の質量， c はダッシュポットの減衰定数， k はばね定数である．

この例では， x は [長さ]， f は [力]， m は [質量]， c は [力×時間/長さ]， k は [力/長さ] の単位を持つわけだが，一般に 1 自由度系というときは，必ずしもこのような物理量である必要はない．たとえば弾性棒に取り付けた剛体円盤のねじり振動の場合，

$$I\ddot{\theta}(t) + c_{\theta}\dot{\theta}(t) + k_{\theta}\theta(t) = M(t) \quad (1.2)$$

ここで， I は円盤の中心軸まわりの慣性モーメント， M は加振トルク（モーメント）， c_{θ} ， k_{θ} はねじりの減衰係数およびばね定数である．この場合，長さのかわりに角度，質量のかわりに慣性モーメント，力のかわりにトルク（モーメント）が対応するが，運動方程式の式の形は同じである．

このように，系の状態を表す変数の次元は長さであったり角度であったりする．また，3 次元の運動を表す場合は，デカルト座標とか円柱座標とか，座標系の取り方も様々である．これらは後で，一般化変位として一般化される．変位座標系の取り方を変えれば，それに整合するように力の座標系も変えなければいけないのだが，それらは一般化力として一般化される．以降では，式 (1.1) の運動方程式で表される系を扱う．

1.3 自由振動と強制振動

（この節の内容は，後でもう一度出てくるので，初学者は，現時点では結論のみ押さえておけばよい．）

外力 f がゼロのとき**自由振動**，ゼロでないとき**強制振動**という．物理的にいえば，自由振動とは，「外から手を触れない状況での振動」である．しかしそのままではいつまでも静止したままなので，初期条件（初期変位や初期速度）を与えてやる．すると系は振動を始める．つまり**自由振動とは初期条件のみで決まる振動**である．あるいは，別の

やり方として、ある時刻まで外力を加えておいて急に外力をゼロにしてもよいが、その場合も外力がゼロになる直前の変位と速度を初期条件とする自由振動と考えればよい。これに対して、強制振動は外力と初期条件で決まる。

両者の違いを数学的な言葉で言い直してみる。まず振動応答とは、運動方程式という2階の常微分方程式に従う変数 x の値の変化を時間の関数として表したもののだから、

$$\text{振動応答} = 2\text{階常微分方程式の初期値問題の解}$$

であり、

$$\text{自由振動応答} = 2\text{階}\textbf{斉次}\text{常微分方程式の初期値問題の解}$$

$$\text{強制振動応答} = 2\text{階}\textbf{非斉次}\text{常微分方程式の初期値問題の解}$$

である。ここで、斉次微分方程式とは、求めるべき変数（先の例では x ）を含まない項を持たない微分方程式を、非斉次微分方程式とは、求めるべき変数を含まない項を持つ微分方程式を指す。「求めるべき変数を含まない項」とは、「系の内部状態に無関係に作用する力」、すなわち外力に他ならない。

次に、ここで微分方程式の数学を思い出してほしいのだが、まず、

$$2\text{階の斉次線形常微分方程式の一般解は二つの任意定数を含む。}$$

これらを決めると解が確定するが、そのために初期条件が使われる。次に、

$$\text{非斉次線形微分方程式の一般解} = \text{特解} + \text{斉次線形微分方程式の一般解}$$

これについては説明しておこう。表記を簡単にし、また一般性を持たせるために、微分方程式を次のように書く。

$$L\{x(t)\} = f(t) \quad (1.3)$$

L は演算子 (operator) と呼ばれるもので、加減乗除、微分などの演算操作を表す記号である。運動方程式 (1.1) に対しては、

$$L = m \frac{d^2}{dt^2} + c \frac{d}{dt} + k \quad (1.4)$$

と定義される。これを $x(t)$ に作用させたものが運動方程式 (1.1) の左辺になるわけである。演算子 L は線形、すなわち

$$L\{\alpha x(t) + \beta y(t)\} = \alpha L\{x(t)\} + \beta L\{y(t)\} \quad (1.5)$$

が成立することに注意。この方程式 (1.3) の特解を x_p とおくと、

$$L\{x_p(t)\} = f(t) \quad (1.6)$$

また、斉次方程式 $L\{x\} = 0$ の一般解を x_c とおくと、

$$L\{x_c(t)\} = 0 \quad (1.7)$$

これらを辺々加えると、 L の線形性より、

$$L\{x_p(t)\} + L\{x_c(t)\} = L\{x_p(t) + x_c(t)\} = f(t) \quad (1.8)$$

となり、 $x_p + x_c$ もまた式 (1.3) の解であることがわかる。 x_c はやはり二つの未定定数を含むため、解を確定するために初期条件が必要なのは自由振動の場合と同じである。以上のことを再度、物理的な言葉で言い直すと、この節の結論として、

$$\text{強制振動応答} = \text{外力による振動成分} + \text{自由振動成分}$$

ということになる。ここで重要なことは、強制振動といえども一般に自由振動成分が含まれるということである。

1.4 自由振動

自由振動応答を求めるには、要するに斉次微分方程式を解けばよいのであるが、線形定係数なので簡単である。

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (1.9)$$

ある関数 $x(t)$ を微分したものと元の $x(t)$ が定係数を介して等値されないといけないので、解は微分しても元の形を保つ唯一の関数、すなわち指数関数で表されることは明らかである。そこで解を ae^{st} と仮定すると、

$$(ms^2 + cs + k)ae^{st} = 0 \quad (1.10)$$

自明でない解が存在するためには、

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (1.11)$$

これを**特性方程式**という。特性方程式の解を特性根または**極**という。今の場合、特性方程式は2次方程式なので極は二つであり、それらを s_1, s_2 とすると、自由振動の一般解は、

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} \quad (1.12)$$

となる。 a_1, a_2 は任意定数であり、初期条件を与えると確定することができる。

特性方程式は2次方程式なので、

$$s_1, s_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (1.13)$$

と表される。解の出かたは次の通り。

- (i) 相異なる実数解
- (ii) 重解（実数）
- (iii) 一对の共役複素数解
- (iv) 一对の共役な純虚数

これらのうち、どれになるかはパラメータ m, c, k の値に依存する。

1.4.1 $k > 0, c \geq 0$ の場合

以下しばらくの間、 $k > 0, c \geq 0$ を仮定する。むろん通常の振動系はこの範疇に入る。

詳しく見ていく前に、解の形式が簡単になるように、パラメータの変数変換を行おう。解の性質は、要するに式(1.13)の根号内の符号に支配されるので、まず分母分子を $2\sqrt{mk}$ で割って

$$s_1, s_2 = \frac{-\frac{c}{2\sqrt{mk}} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4mk} - 1}}{\frac{2m}{2\sqrt{mk}}} \quad (1.14)$$

と書き直し、

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.15)$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (1.16)$$

とおくと、

$$s_1, s_2 = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n \quad (1.17)$$

となる。導入された二つのパラメータ、 ω_n を**固有振動数**、 ζ を**減衰比**といい、今から見るように、振動系の性質を決定づける重要なパラメータである。なお、同じ変数変換を元の運動方程式 (1.9) に対して施すと、

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0 \quad (1.18)$$

となる。対応する特性方程式は、

$$s^2 + 2\zeta\omega_ns + \omega_n^2 = 0 \quad (1.19)$$

式 (1.18) は **1 自由度振動系の運動方程式の標準形** とでもいうべき書き方で、広く常用されている。

さて、特性方程式の解 s_1, s_2 の出かたに話を戻す。すると式 (1.17) の根号内の符号は ζ の値でのみ決まるので、 ζ の値によって以下のように場合分けされる。

(i) $\zeta > 1$ のとき

$s_1, s_2 = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$ は相異なる実数。明らかに、いずれも負になる。したがって、

$$x(t) = a_1e^{s_1t} + a_2e^{s_2t} \quad (1.20)$$

において、右辺の 2 項はいずれも $t \rightarrow \infty$ で 0 に漸近する指数関数である。繰り返しを伴わないので振動とは言えず、このような状態は**過減衰**と呼ばれる。 $t \rightarrow \infty$ で 0 に漸近するということは、系が**安定**であることを表している。収束の速さ（遅さ）は s_1, s_2 のうち絶対値が小さいほうに支配されるので、 s_1 の絶対値ができるだけ大きい（0 から遠い）ほうが収束が速い。つまり、 $\zeta \rightarrow 1$ となるほうが収束が速くなる。（図 1.5(p) ~ (r)）

なお、もし s_1, s_2 のどちらか一方が正なら、自由振動解は $t \rightarrow \infty$ で ∞ に発散する。このような場合を**不安定**という。今考えているパラメータの範囲（ $k > 0, c \geq 0$ ）では系は不安定にならない。どのような場合に不安定になるかは後で述べる。

(ii) $\zeta = 1$ のとき

$s_1 = s_2 = -\omega_n$ は重解で負の実数。このとき一般解は

$$x(t) = a_1e^{-\omega_nt} \quad (1.21)$$

としたいところだが、これだけでは不足で、たとえば $x(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$ なる初期条件に対する応答（すなわちゼロから立ち上がって再びゼロに収束するような応答）を表現することができない。そこで定数変化法で他の解がないか探してみる。まず解を $a(t)e^{-\omega_nt}$ とおく。

$$\frac{d}{dt}(a(t)e^{s_1t}) = (\dot{a} - \omega_na)e^{-\omega_nt} \quad (1.22)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(a(t)e^{s_1t}) = (\ddot{a} - 2\omega_n\dot{a} + \omega_n^2a)e^{-\omega_nt} \quad (1.23)$$

これらを運動方程式 (1.18) に代入して計算すると、 $\ddot{a} = 0$ を得る。よって、 $a = c_1t + c_2$ となるから、したがって、もう一つの解を $te^{-\omega_nt}$ として一般性を失わない。以上より、一般解は、

$$x(t) = a_1e^{-\omega_nt} + a_2te^{-\omega_nt} \quad (1.24)$$

となる。この状態を**臨界減衰**といい、応答の収束が最も速い。（図 1.5(m) ~ (o)）

(iii) $0 < \zeta < 1$ のとき

s_1, s_2 は

$$s_1, s_2 = \left(-\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2}\right)\omega_n \quad (1.25)$$

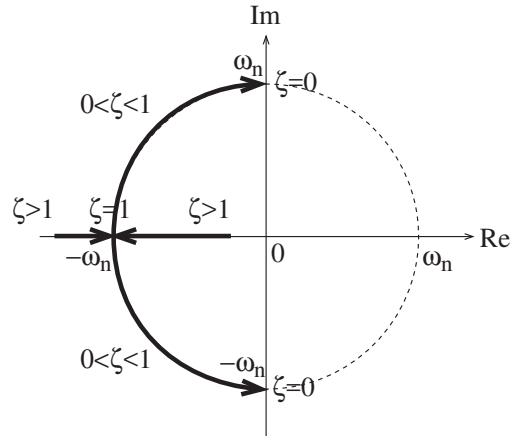


Fig. 1.2 $\zeta \rightarrow +0$ としたときの極の軌跡

で，一对の共役複素数である．一般解は，

$$x(t) = a_1 e^{-\zeta \omega_n t + i \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t} + a_2 e^{-\zeta \omega_n t - i \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t} \quad (1.26)$$

まず注意すべきことは，二つの基本解は互いに共役な複素数であるので，応答を表す $x(t)$ が実数であるためには，係数 a_1, a_2 もまた互いに共役でなければならないということである．つまり， $a_2 = \bar{a}_1$ ．これより，

$$x(t) = 2\text{Re} \left\{ a_1 e^{-\zeta \omega_n t + i \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t} \right\} = a e^{-\zeta \omega_n t} \cos \left(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \varphi \right) \quad (1.27)$$

ただし， $a = 2|a_1|$ ， $\varphi = \angle a_1$ とおいた．新しい未知定数 a, φ は，やはり初期条件で決まる．または，上式右辺の $\cos$ の項を加法定理で開いて，

$$x(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \cos \left(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \right) + B e^{-\zeta \omega_n t} \sin \left(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \right) \quad (1.28)$$

としてもよい．むしろ未知定数 A, B は初期条件で決まる．

式 (1.27), 式 (1.28) は振動数 $\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n$ (これを**減衰固有振動数**という． ω_d と表記することが多い．) の単振動に，単調減少する指数関数包絡線 $e^{-\zeta \omega_n t}$ をかけたものであり，**減衰自由振動**を表す．振幅がゼロに収束する速度は指数関数包絡線がゼロに収束する速度で決まり，減衰比 ζ が大きいほど収束が速い．この状態を**不足減衰**という．図 1.5(d)～(l) を参照せよ．ただしここでは，式 (1.28) の形式の基本解を示している．

(iv) $\zeta = 0$ のとき

$s_1 = -s_2 = i\omega_n$ は共役な純虚数．このときの一般解は，式 (1.27) で $\zeta = 0$ としたものであり，

$$x(t) = a \cos(\omega_n t + \varphi) \quad (1.29)$$

の単振動となり，振動はいつまでも減衰しない．(図 1.5(a)～(c)) またこの式から，

固有振動数 = 減衰がゼロの系の自由振動の振動数

であることがわかる．

以上をまとめると次のように言える．

極の実部（負になる）は自由振動の減衰の速さを表し，極の虚部は自由振動の振動数を表す．

減衰比 ζ による極の動きを図 1.2 にまとめて示す．極の軌跡は過減衰 ($\zeta > 1$) では実軸上を移動し，臨界減衰 ($\zeta = 1$) で重解になり，1 未満になると，二手に分かれて原点を中心とする半径 ω_n の円弧上を移動し， $\zeta = 0$ で虚軸上の $\pm i\omega_n$ に至る．極は常に虚軸または右半面にあり，したがって（実部が正でないの）安定である．

1.4.2 減衰係数とばね定数の符号に制限を付けない場合 *

(節見出しに * 印のついた節は、初学者は読み飛ばしてよい.)

ここまでは先に断ったように、 $c \geq 0, k > 0$ の範囲で考えてきたが、このようなときには系は必ず安定である。では一般化して、 $c < 0, k \leq 0$ も許すとどうなるか。

再度、

$$s_1, s_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (1.30)$$

から出発する。今度は k の符号が負になることを考慮して、

$$\omega_n = \sqrt{\frac{|k|}{m}} \quad (1.31)$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{m|k|}} \quad (1.32)$$

と定義すると、極は

$$s_1, s_2 = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \frac{k}{|k|}} \right) \omega_n \quad (1.33)$$

ここで $\frac{k}{|k|}$ は $k > 0$ のとき 1 , $k < 0$ のとき -1 である。極を実部と虚部に分けて $s_1 = \sigma_1 + i\omega_1$, $s_2 = \sigma_2 + i\omega_2$ と表すと表 1.1 のようになる。ただし、 $k = 0$ のときは ζ が定義できないので、表中 $k = 0$ の行の第 1 マスは $c > 0$ の場合を、第 2 マスは $c = 0$ の場合を、第 3 マスは $c < 0$ の場合を表していると解釈してほしい。表より、 $c < 0$ または $k < 0$ で極の実部 σ_1, σ_2 のどちらか一方が正となり、不安定となることがわかる。 $k = c = 0$ の時は極は 0 の重解で、一見不安定でないように思えるが、実はもう一つ $x = t$ なる等速直線運動の解があり、実際には不安定である。

ばね定数が負とは、倒立振り子（逆立ちした振り子）のような系で、変位が大きくなる方向に力が働くような場合である。一方、負の減衰係数の簡単な例を示すのは難しいが、外部からエネルギーの供給が一定してある場合、いわゆるポジティブフィードバックがかかるような系がこれに相当する。自励振動という振動の種類があり、風によるフラッタやびびり振動はこれの一種であるが、自励振動を起こす系は負の減衰が作用する系としてモデル化できることが知られている。

1.5 振動現象の直感的イメージ

これまでは 1 自由度系の自由振動について、運動方程式の初期値問題の解を求めるという観点から数学的に解説を行ってきたが、ここで話をいったん数学の場から物理の場に戻し、振動現象に対する直感的なイメージを共有しておこう。

振動とは位置や圧力などの量の変化のパターンがくりかえし持続する現象である。ある量の変化のパターンがくりかえし持続するためには、その量に増減が起こったときに、値の動きを維持しようとする作用と、値のずれ

Table 1.1 パラメータの値と極の位置

	$\zeta > 1$	$\zeta = 1$	$0 < \zeta < 1$	$\zeta = 0$	$-1 < \zeta < 0$	$\zeta = -1$	$\zeta < -1$
$k > 0$	$\sigma_1, \sigma_2 < 0$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$	$\sigma_1 = \sigma_2 < 0$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$	$\sigma_1 = \sigma_2 < 0$ $\omega_1 = -\omega_2 > 0$	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ $\omega_1 = -\omega_2 > 0$	$\sigma_1 = \sigma_2 > 0$ $\omega_1 = -\omega_2 > 0$	$\sigma_1 = \sigma_2 > 0$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$	$\sigma_1, \sigma_2 > 0$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$
$k = 0$	$\sigma_1 = 0, \sigma_2 < 0$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$			$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$	$\sigma_1 = 0, \sigma_2 > 0$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$		
$k < 0$	$\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$						

を元に戻そうとする作用の両方が必要である。1自由度系において、質点の動きを維持しようとする作用は質点に作用する**慣性**であり、質点の位置の基準点からのずれを元に戻そうとする作用は、ばねが持つ**復元性**である。

この観点で、非減衰の自由振動現象を見直してみよう。図 1.3 のように、ばねにつながれた質点を考える。この質点を持つ速度を変化させるためには、速度の変化に抵抗する力（**慣性力**）を打ち消すだけの力が必要である。その力は、釣り合い位置からの変位に比例するばね力（**復元力**）が供給する。つまり、慣性力と復元力は釣り合っていないといけないというのが、運動方程式（またはダランベールの原理）が教えるところである。いま、ある瞬間、質点が釣り合い位置を下向きに速度を持って運動しているとしよう。このとき質点はある運動エネルギーを持っている。釣り合い位置において復元力はゼロであるから、質点は速度を変えることができず、釣り合い位置を通り越してそのまま下方に移動する。釣り合い位置からの距離の増加にしたがって復元力が増加するが、このとき復元力は質点の速度と逆向きに作用するため、質点に対して負の仕事を（ブレーキとして作用する）。その結果、質点の運動エネルギーは減少し（つまり減速し）、その分、ばねのポテンシャルエネルギーが増大する。質点が停止すると運動エネルギーはゼロになるが、復元力は上向きに作用したままなので、質点は、今度は上方に運動し始める。このとき、復元力は質点の速度と同方向になるため、質点に対して正の仕事を与える。その結果、質点の運動エネルギーは増加し（つまり加速し）、その分、ばねのポテンシャルエネルギーは減少する。質点は最大速度で釣り合い位置を上方に通過する。あとは先ほどと運動と力の方向が共に逆になるだけであり、質点とばねは相互に振動的にエネルギーをやりとりしながら、現象が持続する。ある時刻で振動系全体が持つ力学的エネルギー、すなわち質点の運動エネルギーとばねのポテンシャルエネルギーの総和は保存され、時刻を問わず一定に保たれる。

以上が非減衰 1 自由度系の自由振動現象、つまり単振動であり、振動の繰り返しの速さ、つまり振動数は慣性と復元性のバランスで決まる。慣性の大きさ、復元性の大きさを支配するのは m, k の大きさであり、両者の比、つまりバランスで固有振動数が決まる事実と一致している。

1.6 振動現象のエネルギー的考察

前節で、1 自由度系の自由振動を慣性と復元性の相互作用、さらにはエネルギー的観点を交えて眺めたが、ここでは数式を使ってもう少しこの観点を追究してみよう。運動方程式

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (1.34)$$

の両辺を x について不定積分する。ここで、

$$\int \cdot dx = \int \cdot \frac{dx}{dt} dt = \int \cdot \dot{x} dt \quad (1.35)$$

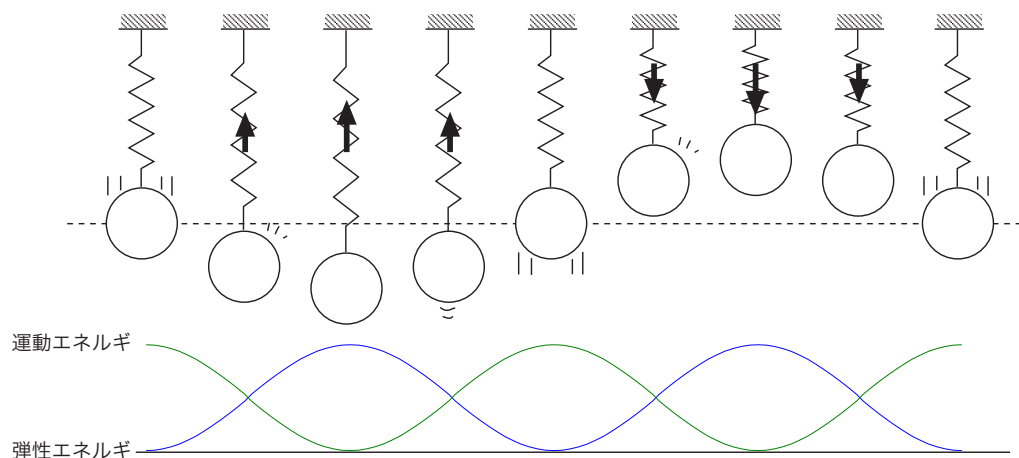


Fig. 1.3 慣性と復元性のせめぎ合い、エネルギーのキャッチボール

であることに注意して積分を計算すると、

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + c \int (\dot{x})^2 dt + \frac{1}{2}kx^2 = \int f\dot{x}dt + E_0 \quad (1.36)$$

ここで E_0 は積分定数である。この式の各項はエネルギーの次元を持っており、ある時刻におけるエネルギーの釣り合い（収支）を表す式である。第1項目は運動エネルギー、第2項目は減衰によって消散されるエネルギー、第3項目はばねのポテンシャルエネルギー、右辺第1項は外力が系に対して与える仕事を表している。最後の項は上式で $t=0$ としたとき、 $\frac{1}{2}m\dot{x}(0)^2 + \frac{1}{2}kx(0)^2 = E_0$ となることから、初期時刻において系が持っているエネルギー（運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和）である。運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは系のある瞬間の状態（変位と速度）で決まる量であり、両者の和は力学的エネルギー（振動エネルギー）を表す。これらに対して、消散エネルギーと外力の仕事は初期時刻からの累積値である。消散エネルギーは積分の中身が常に正なので時間に対して単調増加である。いっぽう、外力の仕事は外力の向きと速度の向きの関係によって積分の中身が正になったり負になったりするため、値は増減する。

運動エネルギーを T 、ポテンシャルエネルギーを U 、消散エネルギーを D 、外力が与える仕事を W と書くと、式 (1.36) より、

$$T + U = E_0 - D + W \quad (1.37)$$

となる。この式から次のようなことがわかる。まず減衰と外力が存在しないとき、すなわち非減衰自由振動の場合、初期時刻において系が持っているエネルギーは完全に保存され、振動エネルギーは一定値を保つ。つまりこれは振動応答が単振動であることを示している。減衰が微量でも存在すると、時間と共にエネルギーが徐々に消散していき、振動エネルギーは目減りしていく。その結果、応答振幅は徐々に小さくなっていく（減衰自由振動）。外力が存在する場合は、外力は振動エネルギーを増加させることもあるし減少させることもある。外力が正の仕事をし続け、振動エネルギーが際限なく増加していく状態を**共振**という。逆に外力をうまくコントロールすることによって系のエネルギーを減少させることも可能であり、これが**アクティブ振動制御**である。このようなエネルギーの観点で考えると、振動を抑える制振の戦略は、次の二つに集約されよう。

- エネルギーの流入を減らす：振動源対策、振動絶縁など
- エネルギーの流出を増やす：減衰要素の付与、アクティブ制振など

演習問題 1

[1] 質量 1kg, ばね定数 400N/m, 減衰係数 20Ns/m のダッシュポットを持つ図 1.1 の 1 質点系の固有振動数は何 Hz か。また、過減衰、臨界減衰、不足減衰のいずれか。

[2] 図 1.4 の 1 質点系の運動方程式を求めよ。

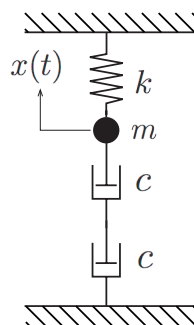


Fig. 1.4 1 質点系

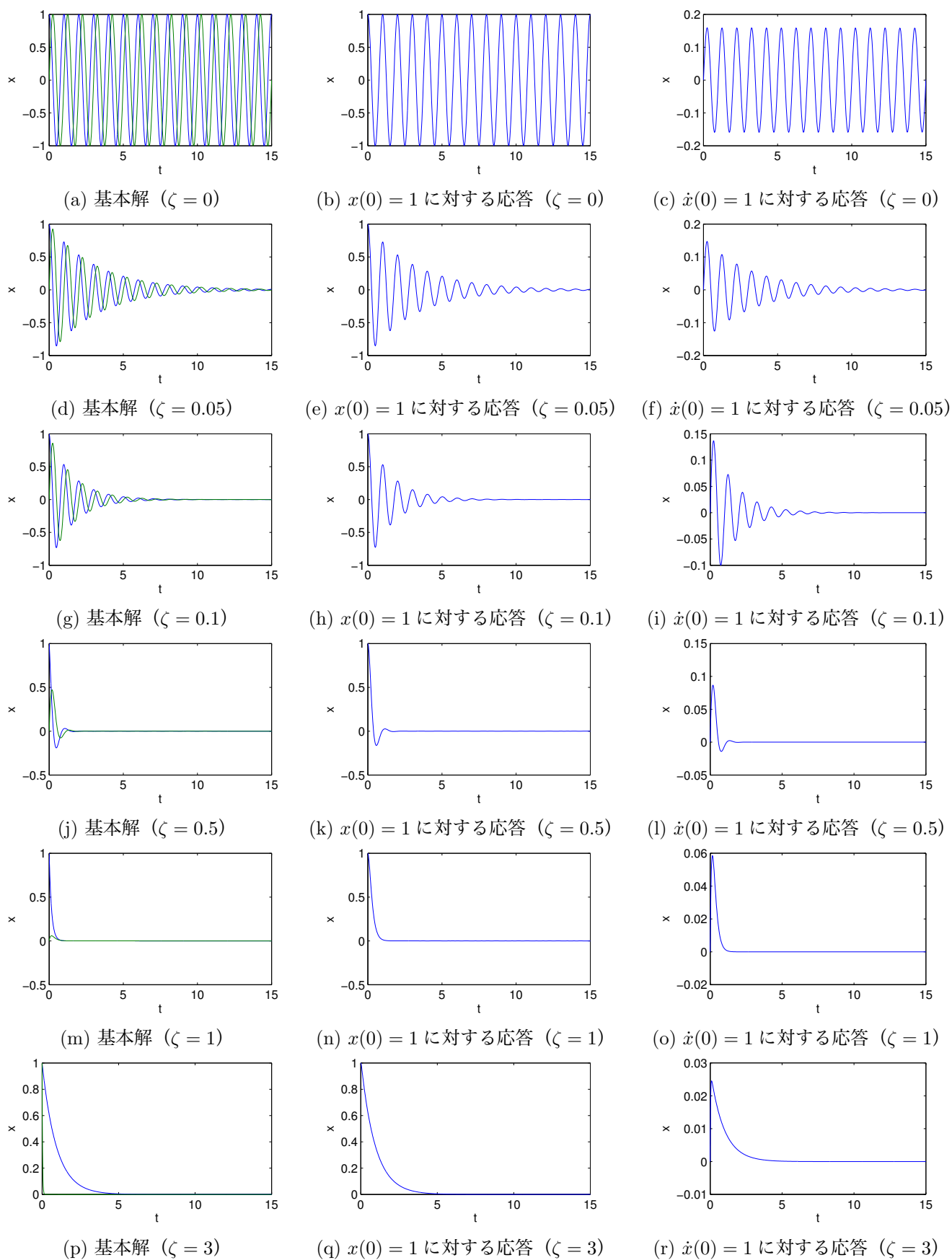


Fig. 1.5 減衰比の値と基本解, 初期変位に対する応答, 初期速度に対する応答

第2章

1 自由度系の強制振動（1）：定常応答

2.1 強制振動のいろいろ

ゼロでない外力が作用する場合の振動を強制振動という。すなわち運動方程式

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (2.1)$$

の解が1自由度系の強制振動応答である。外力としてはもちろんどんなものであってもよいのだが、ありとあらゆる外力に対する応答を調べ尽くすわけにもいかないので、通常は、数学的な取り扱いが簡単で工学的な意味も大きい代表的な力（いわばテスト外力）に対する応答を調べる。そのような力には、

- 調和力（正弦波）
- 単位インパルス力
- 単位ステップ力
- ランダム力（白色雑音）

などがある。（ここではランダム力については言及しない。）

実は、系が線形であれば、このうちの一つに対する応答が完全にわかっていれば、他のテスト外力のみならず、任意の外力に対する応答を知ることができる。これが重ね合わせの理が成り立つ線形系のありがたさである。したがって、上記のテスト外力のうち、一つに対する応答がわかれば十分とも言えるのだが、通常はこれらのうち最も対照的な二つの力、調和力と単位インパルス力に対する応答を調べる。

2.2 調和外力に対する定常応答

2.2.1 定常応答とは

前章で述べたことから、調和外力に対する応答は、

$$\text{調和外力に対する応答} = \text{外力による応答成分（特解）} + \text{自由振動成分（斉次一般解）}$$

と書ける。このうち自由振動成分は前章で述べた方法で解析ができるので、これを切り離して第1項目だけを考える。減衰がわずかでも存在すれば自由振動成分は0に漸近することを考慮すれば、第1項目だけを考えるということは加振開始から十分な時間が経過した後の応答を考えていることに相当する。このような応答を**定常応答**という。また、そのような状況を**定常状態**という。定常応答解析では初期時刻という概念を考えない。外力は無限の過去に始まり、未来永劫続いていると考える。

2.2.2 三角関数による方法

さて、定常応答を求めるには、次の運動方程式を解けばよい。

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F \cos \omega t \quad (2.2)$$

F は調和外力の振幅であり正の実数とする。ここで、定常応答解について重要な推察を行う。外力が振動数 ω を持つ繰り返し力なので、それに駆動される定常応答もまた同じ振動数を持つ繰り返しになるはずである。ただし振幅（振動の大きさ）と位相（山谷のタイミング）は異なるであろう。そこで、振幅 x_0 と外力に対する位相遅れ φ を未知量として $x(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi)$ とおいてみる。数学的には、これは特解の関数形を仮定したということである。これを式 (2.2) に代入した式

$$m \frac{d^2}{dt^2} \{x_0 \cos(\omega t - \varphi)\} + c \frac{d}{dt} \{x_0 \cos(\omega t - \varphi)\} + kx_0 \cos(\omega t - \varphi) = F \cos \omega t \quad (2.3)$$

を満たす振幅 x_0 と位相遅れ φ が無事求まれば大当たりということである。

加法定理を用いて、左辺の三角関数を展開すると、

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} \{x_0 (\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi)\} &+ c \frac{d}{dt} \{x_0 (\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi)\} \\ &+ kx_0 (\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi) = F \cos \omega t \end{aligned} \quad (2.4)$$

さらに微分を計算して整理すると、

$$(-m\omega^2 \cos \varphi + c\omega \sin \varphi + k \cos \varphi) x_0 \cos \omega t + (-m\omega^2 \sin \varphi - c\omega \cos \varphi + k \sin \varphi) x_0 \sin \omega t = F \cos \omega t \quad (2.5)$$

上式両辺の $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ の係数を等値すると、

$$(-m\omega^2 \cos \varphi + c\omega \sin \varphi + k \cos \varphi) x_0 = F \quad (2.6)$$

$$(-m\omega^2 \sin \varphi - c\omega \cos \varphi + k \sin \varphi) x_0 = 0 \quad (2.7)$$

これらを $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ について整理すると、

$$x_0 \cos \varphi = \frac{-m\omega^2 + k}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2} F \quad (2.8)$$

$$x_0 \sin \varphi = \frac{c\omega}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2} F \quad (2.9)$$

式 (2.8), 式 (2.9) をそれぞれ 2 乗したものを目々加えて計算すると、まず振幅 x_0 が求まる。

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} F \quad (2.10)$$

位相遅れ φ は、式 (2.8), 式 (2.9) の比をとったものより、

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{-m\omega^2 + k} \quad (2.11)$$

と定められる。これで振幅 x_0 と位相遅れ φ が無事求まったので、最初に仮定した解の形は妥当だったということである。以上より、定常応答解を得ることができた。

2.2.3 複素振幅表示による方法

上で述べた手法では三角関数の計算が必要だった。三角関数は扱いが多少煩雑なので、より簡単な**複素数表示による方法**を用いる。単に計算が簡単だというだけでなく、のちに周波数応答関数あるいは周波数伝達関数という極めて重要な概念に至るためのステップでもある。

まず、上式の外力に対して位相を $\pi/2$ だけずらした外力に対する応答を考える。時間を位相 $\pi/2$ の分（すなわち $\pi/2\omega$ ）だけシフトしただけなので、応答も同じだけ時間がずれたもの（つまり $\cos$ が $\sin$ にかわるだけ）になるはずである。

$$m \frac{d^2}{dt^2} \{x_0 \sin(\omega t - \varphi)\} + c \frac{d}{dt} \{x_0 \sin(\omega t - \varphi)\} + kx_0 \sin(\omega t - \varphi) = F \sin \omega t \quad (2.12)$$

式 (2.12) に虚数単位 i を掛けて式 (2.3) と加え、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いると、

$$m \frac{d^2}{dt^2} \{x_0 e^{i(\omega t - \varphi)}\} + c \frac{d}{dt} \{x_0 e^{i(\omega t - \varphi)}\} + kx_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = F e^{i\omega t} \quad (2.13)$$

ここで、 $X = x_0 e^{-i\varphi}$ とおくと、

$$m \frac{d^2}{dt^2} \{X e^{i\omega t}\} + c \frac{d}{dt} \{X e^{i\omega t}\} + kX e^{i\omega t} = F e^{i\omega t} \quad (2.14)$$

となる。 X を**複素振幅**といい、その定義、

$$X = x_0 e^{-i\varphi} \quad (2.15)$$

からわかるように、その絶対値 $|X|$ は振動振幅 x_0 を、偏角に負号をつけたもの $-\angle X$ は位相遅れ φ を表す。すなわち、上の方程式 (2.14) を解いて X を定めれば定常応答解が確定する。式 (2.14) は結局、元の運動方程式 (2.1) において、

$$f(t) = F e^{i\omega t}, \quad x(t) = X e^{i\omega t} \quad (2.16)$$

を代入したものであり、上式のように仮定した定常応答解の形を与えられた運動方程式に代入するのが定常応答を求める第1ステップ、代入した式 (2.14) を応答の複素振幅 X について解くのが第2ステップである。

では、式 (2.14) を解いていこう。といっても、難しい計算は要らない。微分を計算して $X e^{i\omega t}$ をくくり出すと、

$$(-m\omega^2 + ic\omega + k) X e^{i\omega t} = F e^{i\omega t} \quad (2.17)$$

となるから、未知なる複素振幅 X は、直ちに

$$X = \frac{F}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \quad (2.18)$$

と求まる。したがって定常応答解は、

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.19)$$

$$x_0 = |X| = \frac{1}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} F \quad (2.20)$$

$$\varphi = -\angle X = \tan^{-1} \frac{c\omega}{-m\omega^2 + k} \quad (2.21)$$

これだけである。なお、外力が $f(t) = F \sin \omega t$ の場合の定常応答解は、式 (2.19) の $\cos$ が $\sin$ に変わるだけで、あとは同じであることは言うまでもないだろう。

あるいは、同じことだが、いったん複素数表現を用いた解として、

$$x(t) = X e^{i\omega t} = \frac{F}{-m\omega^2 + ic\omega + k} e^{i\omega t} \quad (2.22)$$

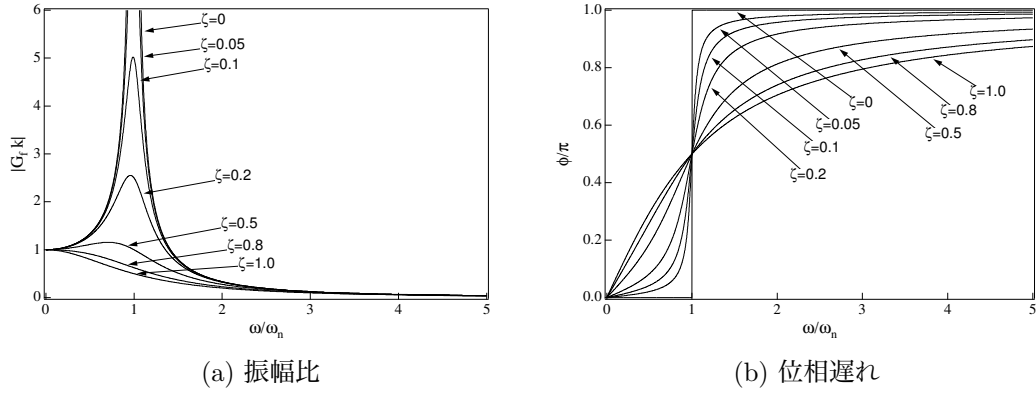


Fig. 2.1 1 質点系の共振曲線

を作ってみると、これは、その実部が $f(t) = F \cos \omega t$ なる外力に対する定常応答、虚部が $f(t) = F \sin \omega t$ なる外力に対する定常応答という意味を持つ複素数であった。したがって、元の問題（式 (2.2)）に対する定常応答としては、式 (2.22) の実部をとって、

$$x(t) = \text{Re} \left\{ \frac{F}{-m\omega^2 + ic\omega + k} e^{i\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ |X| e^{i\angle X} e^{i\omega t} \right\} = |X| \text{Re} \left\{ e^{i(\omega t + \angle X)} \right\} \quad (2.23)$$

これを計算すると結局、式 (2.19)～式 (2.21) と同じになる。

2.2.4 周波数応答関数

上で述べたように、応答の複素振幅 X の絶対値は応答の振動振幅 x_0 を、偏角に負号をつけたものは位相遅れ φ を表す。同様に、 X/F の絶対値は外力の振幅に対する応答の振幅比を、偏角に負号をつけたものは外力に対する応答の位相遅れを表すことになる。そこで、 $G_f = X/F$ とおくと、

$$G_f(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \quad (2.24)$$

このように、 G_f は ω の関数になる。これを**周波数応答関数**という。周波数応答関数は単位大きさの正弦波外力に対する定常応答の複素振幅を、外力の振動数（加振振動数）の関数として表したものであり、**周波数応答関数の絶対値は外力に対する応答の振幅比を、偏角に負号をつけたものは外力に対する応答の位相遅れを表す**。そこでこれらの値を計算すると、振幅比は、

$$\frac{x_0}{F} = \left| \frac{X}{F} \right| = |G_f(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.25)$$

位相遅れは、

$$\varphi = -\angle \frac{X}{F} = -\angle G_f(\omega) = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (2.26)$$

ω を横軸に、振幅比と位相遅れを縦軸にとって表したものを**共振曲線**という。上式で表される 1 質点系の共振曲線を横軸と縦軸を規格化して表示したものを図 2.1 に示す。

共振曲線の式（または周波数応答関数）を固有振動数 ω_n および減衰比 ζ を用いて書き直しておこう。すると、 $\nu = \omega/\omega_n$ として、

$$G_f(\nu) = \frac{1/k}{1 - \nu^2 + i2\zeta\nu} \quad (2.27)$$

となり、振幅比と位相遅れは、

$$\frac{x_0}{F} = |G_f(\nu)| = \frac{1/k}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}} \quad (2.28)$$

$$\varphi = -\angle G_f(\nu) = \tan^{-1} \frac{2\zeta\nu}{1 - \nu^2} \quad (2.29)$$

となる。

2.2.5 周波数応答関数の性質の概観

上で求めた周波数応答関数は、調和外力に対する 1 自由度系の定常変位応答の様子を表しているわけだが、ここでその性質を概観してみよう。重要なことは、定常応答の振幅比や位相遅れが加振振動数のどのような関数になっているのか、すなわち、加振振動数を変えたとき定常応答がどのように変化するのか、を理解することである。一般に周波数応答関数の数式から、その性質を読み取る際のポイントは次の 5 点である。

- 加振振動数がゼロの場合どうなるか。
- 加振振動数が固有振動数より十分小さい場合どうなるか。
- 加振振動数が固有振動数に等しい場合どうなるか。
- 加振振動数が固有振動数より十分大きい場合どうなるか。
- 加振振動数が無限大の場合どうなるか。

では、式 (2.27) をもとに、具体的にやってみよう。以下、周波数応答関数として式 (2.24) の形をとる場合と（もちろん同じことだが別の表現として）無次元パラメータを導入して書き直した式 (2.27) の形を併記する。

(i) $\omega = 0$ のとき

$$G_f(\omega) = \frac{1}{k} \quad (2.30)$$

あるいはこのとき、 $\nu = 0$ より、

$$G_f(\nu) = \frac{1}{k} \quad (2.31)$$

振動数が 0 とは外力が一定で変動しないことを表すので、これは単位大きさの静的荷重に対する静的変位である。

(ii) $\omega \ll \omega_n$ のとき

$$G_f(\omega) \sim \frac{1}{k} \quad (2.32)$$

あるいはこのとき、 $\nu \ll 1$ より、

$$G_f(\nu) \sim \frac{1}{k} \quad (2.33)$$

よって、周波数応答関数は原点に近い低振動数領域でほぼ $1/k$ の一定値をとる。

(iii) $\omega = \omega_n$ のとき

$$G_f(\omega) = \frac{1}{ic\omega_n} = -i\frac{1}{c\omega_n} \quad (2.34)$$

あるいはこのとき、 $\nu = 1$ より、

$$G_f(\nu) = \frac{1/k}{i2\zeta} = -i\frac{1}{2\zeta k} \quad (2.35)$$

よって、固有振動数で加振したとき、周波数応答関数は虚部が負の純虚数である。

(iv) $\omega \gg \omega_n$ のとき

$$G_f(\omega) \sim -\frac{1}{m\omega^2} \quad (2.36)$$

あるいはこのとき、 $\nu \gg 1$ より、

$$G_f(\nu) \sim -\frac{1/k}{\nu^2} \quad (2.37)$$

よって、周波数応答関数は高振動数領域でほぼ負の実数であり、その大きさ（絶対値）は加振振動数の 2 乗に反比例して減少する。

(v) $\omega \rightarrow \infty$ のとき

$$G_f(\omega) \rightarrow 0 \quad (2.38)$$

あるいはこのとき, $\nu \rightarrow \infty$ より,

$$G_f(\nu) \rightarrow 0 \quad (2.39)$$

よって, 周波数応答関数は高振動数領域で 0 に漸近する.

2.2.6 共振曲線の特徴

共振曲線は, 周波数応答関数を絶対値と偏角に分けてグラフ化したものである. 共振曲線の特徴を簡単にまとめておく. まず振幅の式から次のことが読みとれる.

- 振動数が 0 のとき振幅比は $1/k$. 振動数が 0 とは外力が一定で変動しないことを表すので, これは単位大きさの静的荷重に対する静的変位である.
- 振幅比は $\zeta < \sqrt{1/2}$ のとき極大点を持つ. これを**共振点**という. 共振点での振動数を**共振振動数**といい, $\omega_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}\omega_n$ となる. 特に低減衰の系すなわち ζ が小さいとき (目安としては ζ が 0.05 以下) 根号内はほぼ 1 であるので, $\omega_r \simeq \omega_n$ である. つまり「固有振動数で揺ると共振する」.
- 共振点におけるピークの高さ (共振状態における振幅比) は $\max |G_f| = 1/(2k\zeta\sqrt{1 - \zeta^2})$ となる. 特に, ζ が小さいとき (目安としては ζ が 0.05 以下) 根号内はほぼ 1 であるので, $\max |G_f| \simeq 1/(2k\zeta)$ となる. 減衰が 0 の場合, 共振ピークの高さは無限大である. 減衰が大きくなるにつれてピークは低くなだらかになってくる. このことを用いて, 実験的に求めた共振曲線から減衰比を推定する方法を**ハーフパワー法**という. なお $\zeta \geq \sqrt{1/2}$ ではピークは存在しない.
- 共振振動数より振動数を上げていくと振幅比は振動数の 2 乗にほぼ反比例して単調に減少する. 十分高い振動数ではいくら外力を与えても系はほとんど応答しない.

位相遅れの式からは次のことが読みとれる.

- 減衰が 0 のとき位相遅れは $\omega < \omega_n$ で 0, $\omega = \omega_n$ で $\pi/2$ すなわち $1/4$ 周期分, $\omega > \omega_n$ で π すなわち半周期分である.
- 減衰比が 0 より大きいとき, 振動数が 0 のとき位相遅れは 0, 振動数が大きくなるにつれて位相遅れ量は増加し, $\omega = \omega_n$ で $\pi/2$ すなわち $1/4$ 周期分となる. さらに振動数が大きくなると位相遅れ量も単調に増加し, 振動数が無限大で π すなわち半周期分となる.
- 減衰が大きくなるにつれて, 位相遅れの曲線はなだらかになる.

$\omega < \omega_n$ で位相遅れが $0 \leq \varphi < \pi/2$ とは, 外力振動数が系の固有振動数よりも小さい (遅い) ので, すぐに元の位置に戻ろうとする質点を外力が無理矢理引っ張り出すような状況を示している. 逆に $\omega > \omega_n$ で位相遅れが $\pi/2 < \varphi \leq \pi$ とは, 外力振動数が系の固有振動数よりも大きい (速い) ので, なかなか元の位置に戻ろうとしない質点を外力が無理矢理押し戻すような状況を表している.

2.2.7 周波数応答関数の表示方法のいろいろ

周波数応答関数 (あるいは共振曲線の式) は, 「加振振動数」という実数変数に関する複素数値の関数である. 複素数関数ゆえに, 関数をそのまま一つのグラフとして表示することができない. 「共振曲線」は, そのための方法の一つで, 複素関数値を絶対値と偏角で表現し, それぞれを加振振動数の関数として「振幅比」と「位相遅れ」のグラフに表示したものだった. 図 2.2 に共振曲線を再び示す. 図中の黒点は共振振動数に対応する点 (すなわち絶対値が最大になる点) を表している.

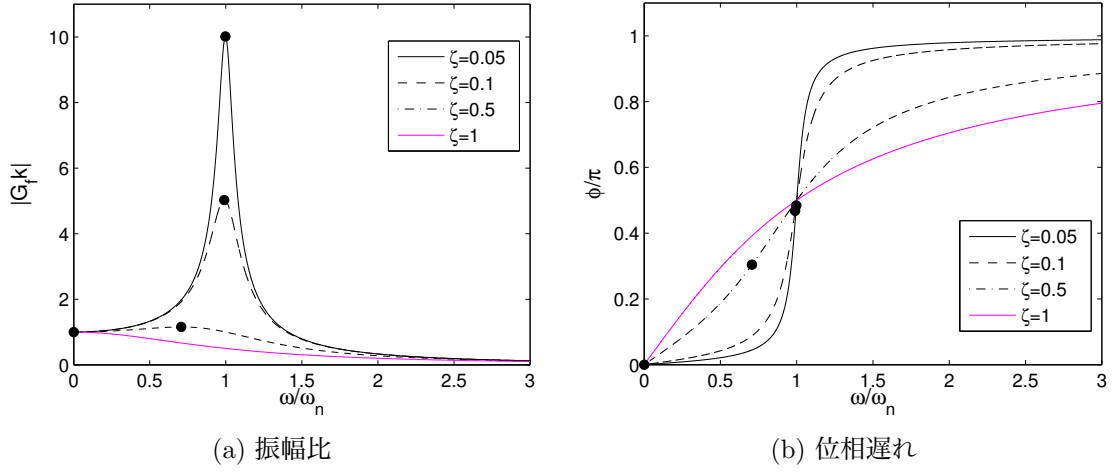


Fig. 2.2 共振曲線

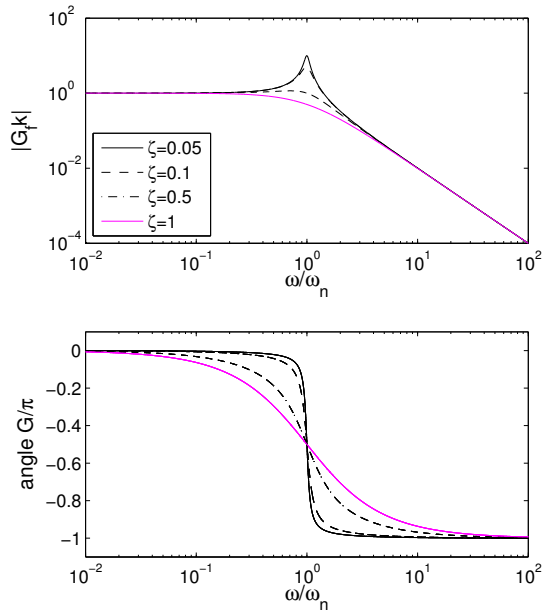


Fig. 2.3 ボーデ線図

制御などの分野では、周波数応答関数（制御分野では**周波数伝達関数**（後述）と呼ぶ方が一般的）を表示するのに、絶対値と偏角を周波数の関数として縦に並べたグラフを描き、横軸を対数軸に、縦軸を絶対値については対数軸に、偏角については線形軸にしたものを用いる。これを**ボーデ線図（Bode plot）**という。横軸が対数軸であるため広い周波数範囲を一望できるほか、両対数グラフとなる絶対値の図においては、プロットの傾きから絶対値の周波数依存性を一目で概観できる点が優れている。図 2.2 をボーデ線図として描き換えたものを図 2.3 に示す。

周波数応答関数の表示方法は他にもある。これらをうまく使うと、周波数伝達関数の特性について理解が深まる。まず、実部と虚部に分けて、それぞれを加振振動数の関数としてグラフ化したものを**コクアド線図**という。周波数応答関数の式 (2.24) より、

$$\operatorname{Re}\{G_f(\omega)\} = \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \quad (2.40)$$

$$\operatorname{Im}\{G_f(\omega)\} = \frac{-c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \quad (2.41)$$

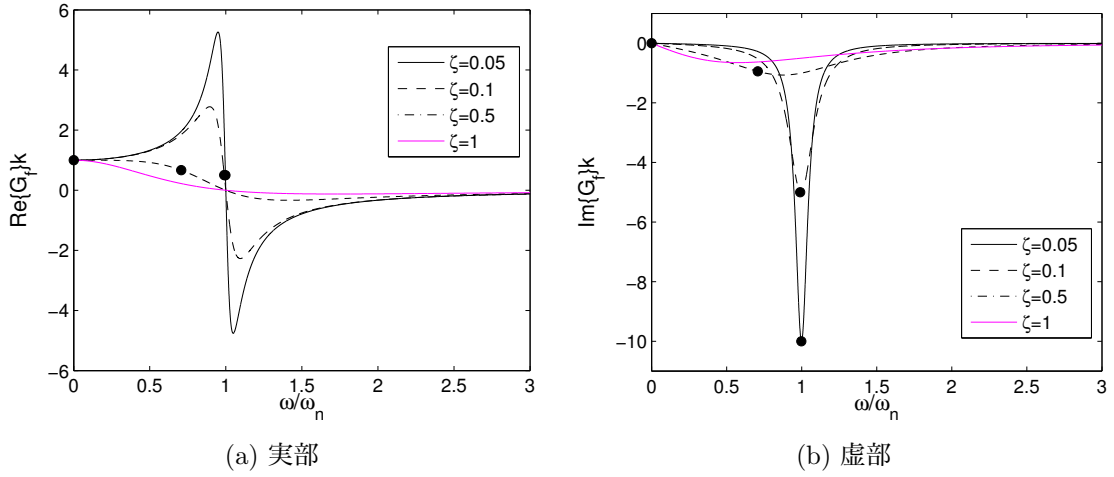


Fig. 2.4 コクアド線図

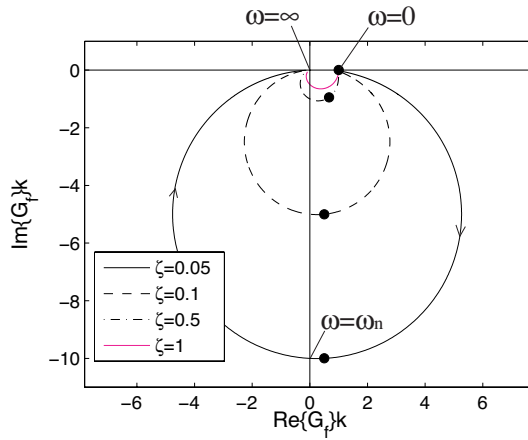


Fig. 2.5 ベクトル軌跡

または、上式を固有振動数 ω_n および減衰比 ζ および $\nu = \omega/\omega_n$ を用いて書き直したものとして、

$$\text{Re}\{G_f(\nu)\} = \frac{1}{k} \frac{1 - \nu^2}{(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \quad (2.42)$$

$$\text{Im}\{G_f(\nu)\} = \frac{1}{k} \frac{-2\zeta\nu}{(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2} \quad (2.43)$$

グラフに表すと、図 2.4 のようになる。図中の黒点は共振振動数に対応する点（すなわち絶対値が最大になる点）を表している。実部と虚部を別々にプロットすることによって、固有振動数において周波数伝達関数が純虚数となり、その虚部は負であることが明確にわかる。

つぎに、複素数たる周波数応答関数の値を複素平面上の点として表し、加振振動数 ω を 0 から ∞ まで動かすと、図 2.5 のように複素平面上の軌跡が得られる。これを**ベクトル軌跡**という。ベクトル軌跡によると、周波数応答関数の値の変化の様子がより一層明確に理解できる。まず、 $\omega = 0$ のとき、周波数応答関数は実軸上の $(1/k, 0)$ にあり、これが起点となる。 $\zeta \ll 1$ のとき ω の増加につれて軌跡は近似的に円を描き、 $\omega = \omega_n$ で虚軸上の $(0, -1/2\zeta k)$ を経て、 $\omega = \infty$ で原点に至る。これからも、 $\zeta \ll 1$ のとき周波数応答関数の絶対値が一つのピークを持つこと、偏角が 0 から $-\pi/2$ を経て $-\pi$ に至ることは明らかである。これより、位相遅れが 0 から $\pi/2$ を経て π に至ることが理解できる。減衰が小さいほど、軌跡の描く円の半径は大きくなり、減衰ゼロで半径は無限大となる。このとき軌跡は、 $\omega < \omega_n$ で実軸上を正の無限遠点に向かって推移し、 $\omega = \omega_n$ の一瞬で下半面をぐるっと回って、 $\omega > \omega_n$ で実軸上の負の無限遠点から原点に向かって戻ってくる。したがって、位相遅れは、 $\omega < \omega_n$ で 0、 $\omega = \omega_n$ の一点

で $\pi/2$, $\omega > \omega_n$ で π となるというべきなのである. なお, 減衰が大きくなると, 軌跡の描く円の歪みは大きくなり, また半径も小さくなる.

演習問題 2

[1] 調和加振力を受ける 1 質点系の運動方程式について答えよ.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F \cos \omega t \quad (2.44)$$

- (1) 運動方程式を, 固有振動数 ω_n , 減衰比 ζ を用いて書き換えよ.
- (2) 書き換えた運動方程式から出発して, 共振曲線の式 (振幅および位相; 式 (2.28) および式 (2.29)) を導け.
- (3) 共振曲線の概略の形 (振幅および位相) を描け.

第3章

1 自由度系の強制振動（2）：いろいろな定常応答

前章の「定常応答」とは、正確には、「調和外力が作用する1質点系の定常変位応答」であった。「何によって系が励振されるか」「応答としてどの物理量をとるか」の組み合わせを変えると、さまざまな定常応答問題を考えることができる。ここでは、定常応答問題のいろいろと、それらに対する周波数応答関数について述べよう。

3.1 コンプライアンス、モビリティ、アクセラランス

まず、「調和外力によって励振される1質点系の定常速度応答」を考えてみよう。前章と同じく、複素振幅表示の方法を使うとすると、運動方程式は、

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = Fe^{i\omega t} \quad (3.1)$$

と書ける。定常変位解を、

$$x(t) = Xe^{i\omega t} \quad (3.2)$$

とおくと、定常速度解は、

$$v(t) = Ve^{i\omega t} = \dot{x}(t) = i\omega Xe^{i\omega t} \quad (3.3)$$

と書ける。式(3.2)を式(3.1)に代入して、変位の複素振幅 X を求めると、

$$X = \frac{F}{-m\omega^2 + i c \omega + k} \quad (3.4)$$

であるから、速度の複素振幅 V は、式(3.3)より、

$$V = \frac{i\omega F}{-m\omega^2 + i c \omega + k} \quad (3.5)$$

よって、定常速度解は、

$$v(t) = \frac{i\omega F}{-m\omega^2 + i c \omega + k} e^{i\omega t} \quad (3.6)$$

と求まる。

速度応答の複素振幅 V を外力の振幅 F で割った周波数応答関数 $M_f(\omega)$ を**モビリティ**という。いっぽう、前章で求めた、変位応答の複素振幅 X を外力の振幅 F で割った周波数応答関数 $G_f(\omega)$ を**コンプライアンス**という。式(3.5)より、モビリティは、

$$M_f(\omega) = \frac{i\omega}{-m\omega^2 + i c \omega + k} \quad (3.7)$$

であり、コンプライアンスに $i\omega$ をかけたものに等しい。モビリティの式(3.7)より、外力に対する速度応答の振幅比は、

$$|M_f(\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (3.8)$$

外力に対する速度応答の位相遅れは,

$$-\angle M_f(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = -\tan^{-1} \frac{k - m\omega^2}{c\omega} = \tan^{-1} \frac{m\omega^2 - k}{c\omega} \quad (3.9)$$

これらを式 (2.25), 式 (2.26) と比較すると, モビリティはコンプライアンスの振幅を ω 倍し, 位相を $\pi/2$ 進めたものであることがわかる. これは, 速度が変位の時間微分であることからすると当然のことである.

モビリティを固有振動数 ω_n および減衰比 ζ を用いて書き直すと, $\nu = \omega/\omega_n$ として,

$$M_f(\nu) = \frac{1}{m\omega_n} \frac{i\nu}{1 - \nu^2 + i2\zeta\nu} \quad (3.10)$$

となり, 振幅比と位相遅れは,

$$|M_f(\nu)| = \frac{1}{m\omega_n} \frac{\nu}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}} \quad (3.11)$$

$$-\angle M_f(\nu) = -\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{2\zeta\nu}{1 - \nu^2} = -\tan^{-1} \frac{1 - \nu^2}{2\zeta\nu} = \tan^{-1} \frac{\nu^2 - 1}{2\zeta\nu} \quad (3.12)$$

となる.

それでは, 振動数の低い方から順にモビリティの性質を見ていこう. 以下, 周波数応答関数として式 (3.7) の形をとる場合と (もちろん同じことだが別の表現として) 無次元パラメータを導入して書き直した式 (3.10) の形を併記する.

(i) $\omega = 0$ のとき

$$M_f(\omega) = 0 \quad (3.13)$$

あるいはこのとき, $\nu = 0$ より,

$$M_f(\nu) = 0 \quad (3.14)$$

振動数が 0 の定常応答とは静的な外力に対する平衡状態に他ならないから, 速度応答はゼロである.

(ii) $\omega \ll \omega_n$ のとき

$$M_f(\omega) \sim \frac{i\omega}{k} \quad (3.15)$$

あるいはこのとき, $\nu \ll 1$ より,

$$M_f(\nu) \sim \frac{1}{m\omega_n} i\nu \quad (3.16)$$

よって, モビリティは原点に近い低振動数領域で振動数にほぼ比例する.

(iii) $\omega = \omega_n$ のとき

$$M_f(\omega) = \frac{1}{c} \quad (3.17)$$

あるいはこのとき, $\nu = 1$ より,

$$M_f(\nu) = \frac{1}{m\omega_n} \frac{1}{2\zeta} \quad (3.18)$$

よって, 固有振動数で加振したとき, モビリティは正の実数である.

(iv) $\omega \gg \omega_n$ のとき

$$M_f(\omega) \sim \frac{-i}{m\omega} \quad (3.19)$$

あるいはこのとき, $\nu \gg 1$ より,

$$M_f(\nu) \sim \frac{1}{m\omega_n} \frac{-i}{\nu} \quad (3.20)$$

よって, モビリティは高振動数領域でほぼ虚部が負の純虚数であり, その大きさ (絶対値) は加振振動数に反比例して減少する.

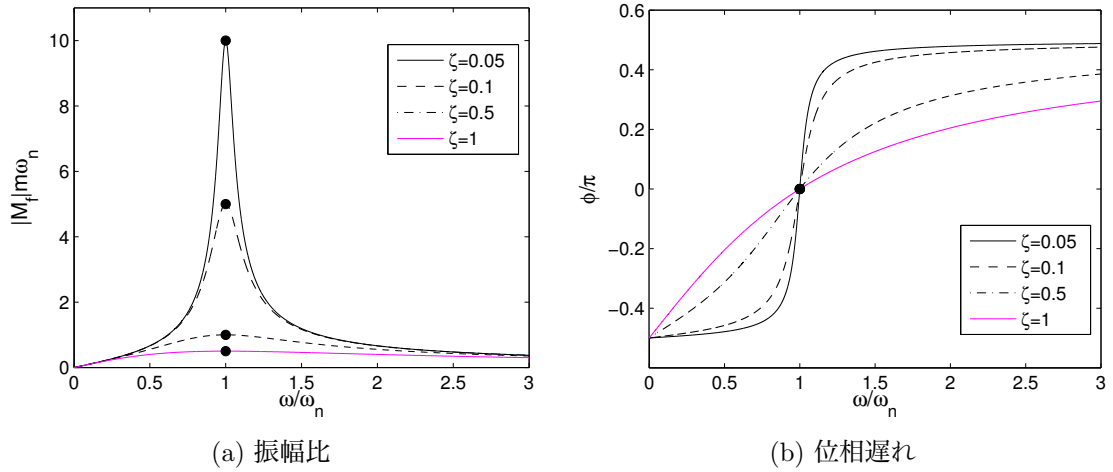


Fig. 3.1 モビリティの共振曲線

(v) $\omega \rightarrow \infty$ のとき

$$M_f(\omega) \rightarrow 0 \quad (3.21)$$

あるいはこのとき, $\nu \rightarrow \infty$ より,

$$M_f(\nu) \rightarrow 0 \quad (3.22)$$

よって, モビリティは高振動数領域で 0 に漸近する.

モビリティについて, 振幅比と位相遅れを描いた共振曲線を図 3.1 に示す. 図中の黒点は共振振動数に対応する点 (すなわち絶対値が最大になる点) を表している. モビリティの共振曲線の特徴を簡単にまとめておく. まず振幅について次のことが読みとれる.

- 振動数がゼロのとき振幅比はゼロであり, 振動数ゼロの近傍で振幅比の曲線は直線状に増加する.
- 振幅比は $\omega = \omega_n$ で極大点を持つ, その高さは $\max |M_f| = 1/(2\zeta m \omega_n)$ となる. つまり速度応答に関しては, 「固有振動数で揺ると共振する」が常に厳密に成り立つ.
- 共振振動数より振動数を上げていくと振幅比は振動数にほぼ反比例して単調に減少する. 十分高い振動数ではいくら外力を与えても系はほとんど応答しない.

位相遅れについては次のことが読みとれる.

- 減衰が 0 のとき位相遅れは $\omega < \omega_n$ で $-\pi/2$ すなわち 1/4 周期分の進み, $\omega = \omega_n$ で 0 すなわち同位相, $\omega > \omega_n$ で $\pi/2$ すなわち 1/4 周期分である.
- 減衰比が 0 より大きいとき, 振動数が 0 のとき位相遅れは $-\pi/2$, 振動数が大きくなるにつれて位相遅れ量は増加し, $\omega = \omega_n$ で 0 すなわち同位相となる. さらに振動数が大きくなると位相遅れ量も単調に増加し, 振動数が無限大で $\pi/2$ すなわち 1/4 周期分となる.
- 減衰が大きくなるにつれて, 位相遅れの曲線はなだらかになる.

固有振動数で外力に対する速度応答の位相遅れがゼロ, すなわち両者が同位相になることは注目に値する. 外力が速度と同位相であるということは, 外力は常に質点の動きと同方向, つまり後押しする方向に向いているということである. すなわち, 外力は質点に対して正の仕事をし続ける. もし系が非減衰なら, 加えられた仕事は累積し失われることがないため, 系の力学的エネルギーは単調に増加する. したがって, 加振開始から無限の時間

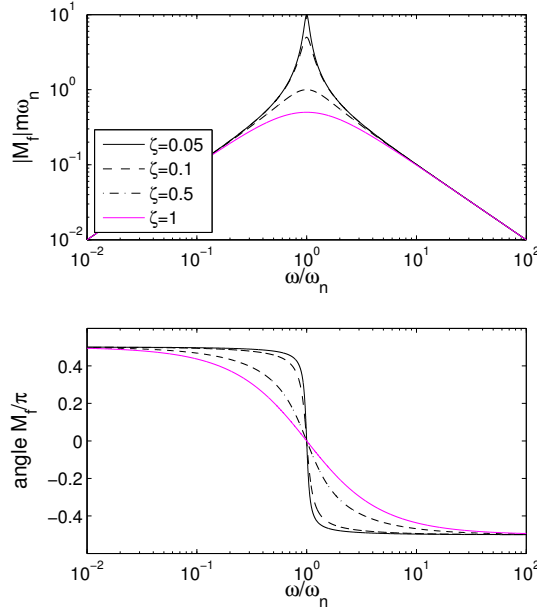


Fig. 3.2 モビリティのボーデ線図

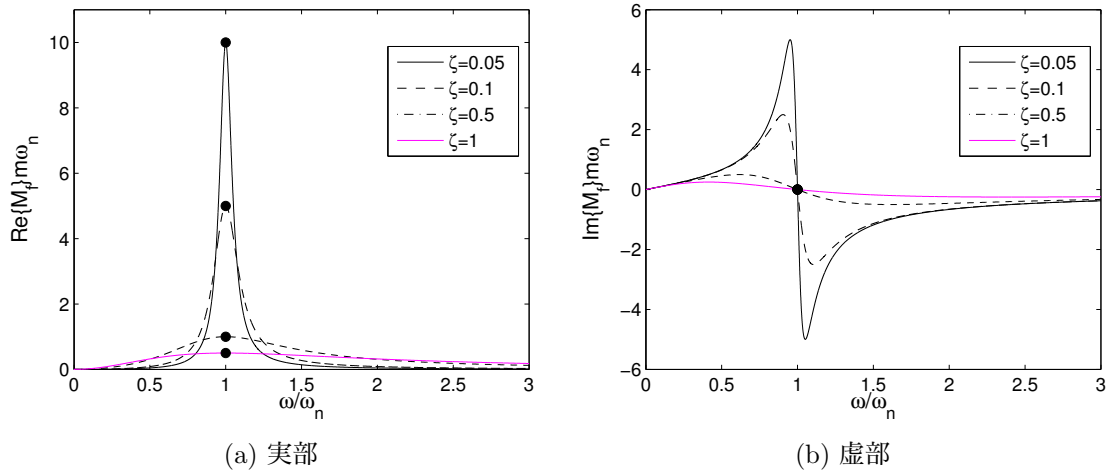


Fig. 3.3 モビリティのコクアド線図

が経過したあと、すなわち定常状態では、振動振幅は無限大になるのである。これが、非減衰の場合に共振曲線（振幅比）が無限大の高さを持つことの意味である。

モビリティのボーデ線図を図 3.2 に、コクアド線図とベクトル軌跡をそれぞれ図 3.3, 図 3.4 に示す。モビリティのベクトル軌跡は、原点を出発し、右半面で正確に円を描いて再び原点に戻る閉曲線になる。

全く同様に、「調和外力によって励振される 1 質点系の定常加速度応答」を考えることもできる。加速度応答の複素振幅 A を外力の振幅 F で割った周波数応答関数 $A_f(\omega)$ を**アクセラランス**という。アクセラランスは、

$$A_f(\omega) = \frac{-\omega^2}{-m\omega^2 + i c \omega + k} \quad (3.23)$$

であり、コンプライアンスに $-\omega^2$ をかけたものに等しい。アクセラランスの式 (3.23) より、外力に対する加速度応答の振幅比は、

$$|A_f(\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (3.24)$$

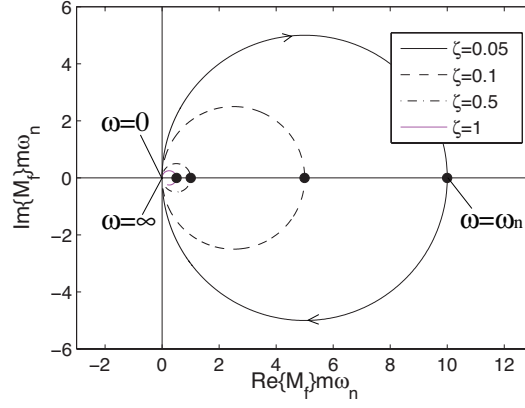


Fig. 3.4 モビリティのベクトル軌跡

外力に対する加速度応答の位相遅れは,

$$-\angle A_f(\omega) = -\pi + \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (3.25)$$

これらを式 (2.25), 式 (2.26) と比較すると, アクセラランスはコンプライアンスの振幅を ω^2 倍し, 位相を π 進めたものであることがわかる. これは, 加速度が変位の 2 階時間微分であることからすると当然のことである.

アクセラランスを固有振動数 ω_n および減衰比 ζ を用いて書き直すと, $\nu = \omega/\omega_n$ として,

$$A_f(\nu) = \frac{1}{m} \frac{-\nu^2}{1 - \nu^2 + i2\zeta\nu} \quad (3.26)$$

となり, 振幅比と位相遅れは,

$$|A_f(\nu)| = \frac{1}{m} \frac{\nu^2}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}} \quad (3.27)$$

$$-\angle A_f(\nu) = -\pi + \tan^{-1} \frac{2\zeta\nu}{1 - \nu^2} \quad (3.28)$$

となる.

それでは, 振動数の低い方から順にアクセラランスの性質を見ていこう. 以下, 周波数応答関数として式 (3.23) の形をとる場合と (もちろん同じことだが別の表現として) 無次元パラメータを導入して書き直した式 (3.26) の形を併記する.

(i) $\omega = 0$ のとき

$$A_f(\omega) = 0 \quad (3.29)$$

あるいはこのとき, $\nu = 0$ より,

$$A_f(\nu) = 0 \quad (3.30)$$

振動数が 0 の定常応答とは静的な外力に対する平衡状態に他ならないから, 加速度応答はゼロである.

(ii) $\omega \ll \omega_n$ のとき

$$A_f(\omega) \sim -\frac{\omega^2}{k} \quad (3.31)$$

あるいはこのとき, $\nu \ll 1$ より,

$$A_f(\nu) \sim -\frac{1}{m}\nu^2 \quad (3.32)$$

よって, アクセラランスは原点に近い低振動数領域で振動数の 2 乗にほぼ比例する.

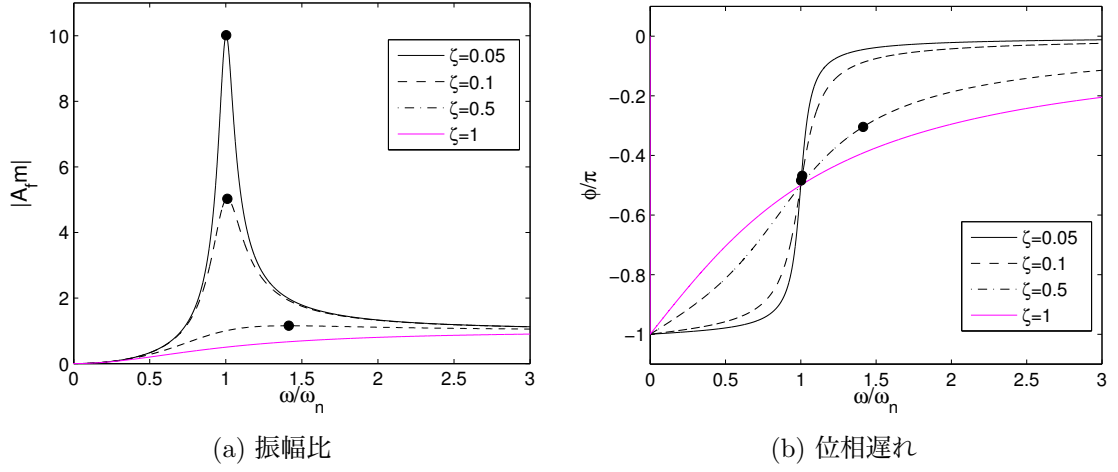


Fig. 3.5 アクセランスの共振曲線

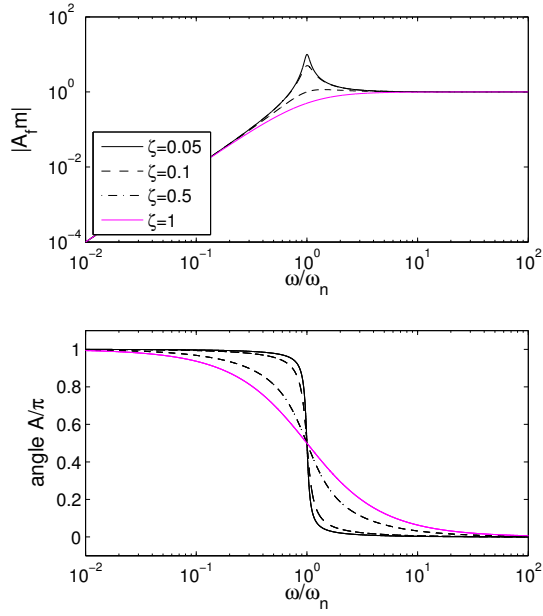


Fig. 3.6 アクセランスのボーデ線図

(iii) $\omega = \omega_n$ のとき

$$A_f(\omega) = \frac{i\omega_n}{c} \quad (3.33)$$

あるいはこのとき, $\nu = 1$ より,

$$A_f(\nu) = \frac{1}{m} \frac{i}{2\zeta} \quad (3.34)$$

よって, 固有振動数で加振したとき, アクセランスは虚部が正の純虚数である.

(iv) $\omega \gg \omega_n$ のとき

$$A_f(\omega) \sim \frac{1}{m} \quad (3.35)$$

あるいはこのとき, $\nu \gg 1$ より,

$$A_f(\nu) \sim \frac{1}{m} \quad (3.36)$$

よって, アクセランスは高振動数領域でほぼ正の実数である.

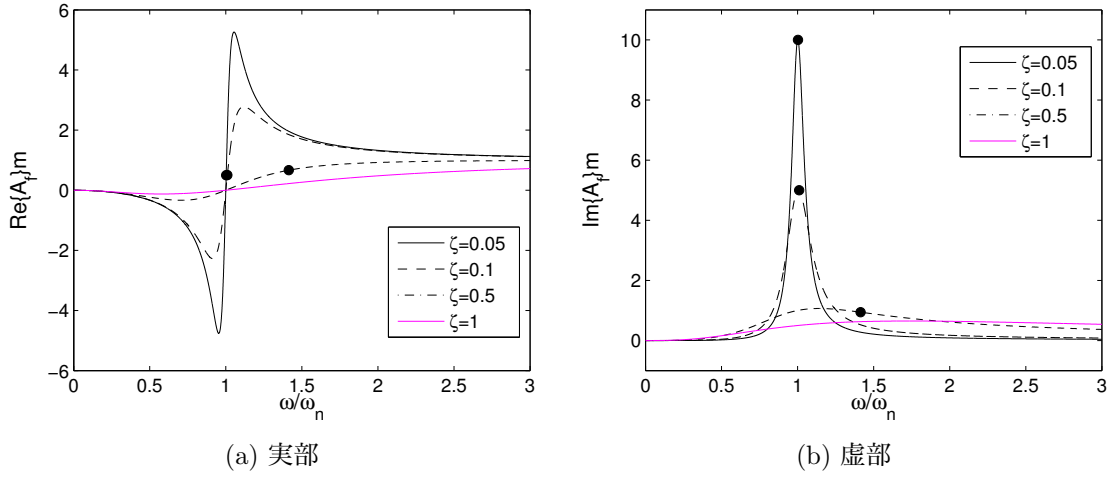


Fig. 3.7 アクセランスのコクアド線図

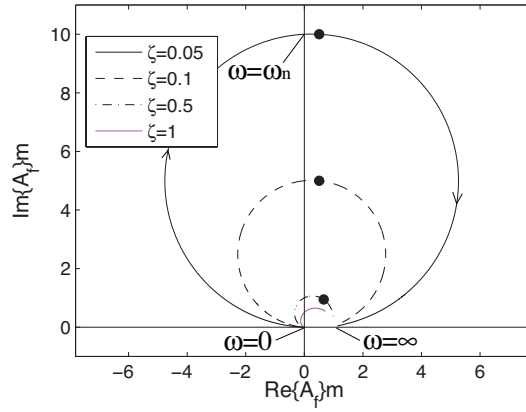


Fig. 3.8 アクセランスのベクトル軌跡

(v) $\omega \rightarrow \infty$ のとき

$$A_f(\omega) \rightarrow \frac{1}{m} \quad (3.37)$$

あるいはこのとき, $\nu \rightarrow \infty$ より,

$$A_f(\nu) \rightarrow \frac{1}{m} \quad (3.38)$$

よって, アクセランスは高振動数領域で一定値 $1/m$ に漸近する.

アクセランスについて, 振幅比と位相遅れを描いた共振曲線を図 3.5 に示す. 図中の黒点は共振振動数に対応する点 (すなわち絶対値が最大になる点) を表している. アクセランスの共振曲線の特徴を簡単にまとめておく. まず振幅について次のことが読みとれる.

- 振動数がゼロのとき振幅比はゼロであり, 振動数ゼロの近傍で振幅比の曲線は 2 次曲線状に増加する.
- 振幅比は $\zeta < \sqrt{1/2}$ のとき $\omega_n / \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ で極大点を持つ. その高さは $\max |A_f| = \omega_n^2 / (2k\zeta\sqrt{1 - \zeta^2})$ となる. 特に, ζ が小さいとき (目安としては ζ が 0.05 以下) 根号内はほぼ 1 であるので, $\max |A_f| \simeq \omega_n^2 / (2k\zeta)$ となる.
- 共振振動数より振動数を上げていくと振幅比は単調に減少し, $\omega \leftarrow \infty$ で $1/m$ に漸近する.

位相遅れについては次のことが読みとれる.

- 減衰が0のとき位相遅れは $\omega < \omega_n$ で $-\pi$ すなわち1/2周期分の進み, $\omega = \omega_n$ で $-\pi/2$ すなわち1/4周期分の進み, $\omega > \omega_n$ で0すなわち同位相である.
- 減衰比が0より大きいとき, 振動数が0のとき位相遅れは $-\pi$, 振動数が大きくなるにつれて位相遅れ量は増加し, $\omega = \omega_n$ で $-\pi/2$ となる. さらに振動数が大きくなると位相遅れ量も単調に増加し, 振動数が無限大で0すなわち同位相となる.
- 減衰が大きくなるにつれて, 位相遅れの曲線はなだらかになる.

アクセラランスのボード線図を図3.6に, コクアド線図とベクトル軌跡をそれぞれ図3.7, 図3.8に示す.

演習問題 3

[1] 調和加振力を受ける1質点系の運動方程式(3.1)から出発して, アクセラランスの式(式(3.23))を導け.

第4章

1 自由度系の強制振動（3）：基礎励振

振動系の励振の仕方（つまり振動系に対する外力の加え方）には、これまでのように外力を質点に「直接的に」加える形態の他に、もうひとつ重要な形態がある。それが、ここで述べる**基礎励振**である。基礎励振では、振動系の支持点を強制的に動かすことによって、質点に「間接的に」外力を加える。

4.1 基礎励振系の運動方程式

図 4.1 で表される 1 質点系を考える。質点の変位を $x(t)$ とし、さらに、これまでは固定されていた支持点 P の変位を $y(t)$ とし、 $y(t)$ を強制的に動かすと考えた振動系を**基礎励振系**という。運動方程式は、次式のようになる。

$$m\ddot{x}(t) + c\{\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\} + k\{x(t) - y(t)\} = 0 \quad (4.1)$$

これを整理して、強制変位に関する項を右辺に持って行くと、

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = c\dot{y}(t) + ky(t) \quad (4.2)$$

となり、 $c\dot{y}(t) + ky(t)$ なる外力が作用する 1 質点系と同一視できることがわかる。

基礎励振系の定式化にはもう一つの方法がある。上の定式化では、変位 $x(t)$, $y(t)$ はともに固定された絶対座標系で測ったものであった。ここで、質点の変位を測る座標系として、支持点 P に固定されて支持点 P とともに動く相対座標系を考えよう。この相対座標系における質点の相対変位を $z(t)$ とすると、絶対変位 $x(t)$ との関係は、

$$z(t) = x(t) - y(t) \quad (4.3)$$

である。これを用いて式 (4.1) を書き換えると、

$$m\{\ddot{z}(t) + \ddot{y}(t)\} + c\dot{z}(t) + kz(t) = 0 \quad (4.4)$$

これを整理して、強制変位に関する項を右辺に持って行くと、

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = -m\ddot{y}(t) \quad (4.5)$$

となり、相対座標系においては、 $-m\ddot{y}(t)$ なる外力が作用する 1 質点系と同一視できることがわかる。この外力 $-m\ddot{y}(t)$ とは、支持点が動くことによって質点に作用する見かけの力、つまり慣性力である。

基礎励振系の運動方程式として、式 (4.2) を用いても式 (4.5) を用いても、当然のことながら力学的には全く等価である。解析の目的に応じて、絶対座標系における応答 $x(t)$ またはその微分量に興味がある場合は式 (4.2) を、相対座標系における応答 $z(t)$ またはその微分量に興味がある場合には式 (4.5) を採用すればよい。例として、

- 自動車のサスペンションの簡単な解析：路面の凹凸パターン $y(t)$ が与えられたときの乗り心地の評価量として、車体における絶対加速度応答 $\ddot{x}(t)$ に興味があるときは、式 (4.2) を用いるのが適当、

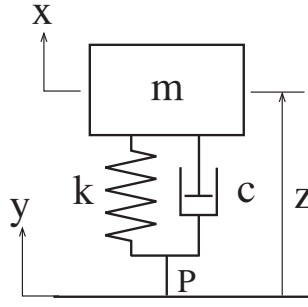


Fig. 4.1 基礎励振系

- 構造物の地震応答の簡単な解析：地震動として地表の加速度 $\ddot{y}(t)$ が与えられたときの，建物の変形量 $z(t)$ を知りたい場合は，式 (4.5) を用いるのが適当，

などが挙げられる．

4.2 基礎励振系の定常応答

4.2.1 絶対変位応答

支持点の変位として正弦波を与えた場合の，質点の絶対変位の定常応答を求めてみよう．例によって，複素振幅表示の方法を用いるとすると，運動方程式 (4.2) より，

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = c\frac{d}{dt}\{Ye^{i\omega t}\} + kYe^{i\omega t} \quad (4.6)$$

定常絶対変位解を，

$$x(t) = Xe^{i\omega t} \quad (4.7)$$

とおいて式 (4.6) に代入し，絶対変位応答の複素振幅 X について解くと，

$$X = \frac{ic\omega + k}{-m\omega^2 + ic\omega + k}Y \quad (4.8)$$

となり，よって，定常絶対変位応答は，複素表示で，

$$x(t) = \frac{ic\omega + k}{-m\omega^2 + ic\omega + k}Ye^{i\omega t} \quad (4.9)$$

と求められる．言うまでもなく，上式の実部が強制変位 $Y \cos(\omega t)$ に対する定常応答，虚部が強制変位 $Y \sin(\omega t)$ に対する定常応答である．

4.2.2 振動伝達率

基礎励振系において，絶対変位応答の複素振幅 X を支持点の複素振幅 Y で除したものを**振動伝達率**という（変位の伝達率であることを強調して**変位伝達率**ともいう）．振動伝達率は，式 (4.8) より，

$$T_f = \frac{ic\omega + k}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \quad (4.10)$$

である．振動伝達率の絶対値は，支持点の強制変位振幅に対する質点変位振幅の比を表す無次元量であり，基礎から質点に振動が何倍に拡大（または縮小）されて伝達されたかを表す指標になる．

$$|T_f| = \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (4.11)$$

また、振動伝達率の偏角に負号をつけたものは、基礎の振動に対する質点の振動の位相遅れを表す。

$$-\angle T_f(\omega) = -\tan^{-1} \frac{c\omega}{k} + \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (4.12)$$

あるいは別の表現として、まず式 (4.10) を実部と虚部に分けて書いた上で偏角を求めることにより、

$$-\angle T_f(\omega) = \tan^{-1} \frac{mc\omega^3}{k(k - m\omega^2) + (c\omega)^2} \quad (4.13)$$

また、振動伝達率を固有振動数 ω_n および減衰比 ζ を用いて書き直すと、 $\nu = \omega/\omega_n$ として、

$$T_f = \frac{1 + i2\zeta\nu}{1 - \nu^2 + i2\zeta\nu} \quad (4.14)$$

となり、振幅比と位相遅れは、

$$|T_f(\nu)| = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\nu)^2}{(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}} \quad (4.15)$$

$$-\angle T_f(\nu) = -\tan^{-1} 2\zeta\nu + \tan^{-1} \frac{2\zeta\nu}{1 - \nu^2} \quad (4.16)$$

となる。それでは、振動数の低い方から順に振動伝達率の性質を見ていこう。以下では無次元パラメータを用いた式 (4.14) の表現を用いて説明する。有次元パラメータを用いた表現式 (4.10) だどのように書けるかは各自確かめてみよ。

(i) $\omega = 0$ のとき

このとき、 $\nu = 0$ より、

$$T_f(\nu) = 1 \quad (4.17)$$

振動数が 0 とは静的な状況であるから、バネは静的釣り合いを保ちながら、支持点の変位をそのまま質点に伝達する。バネは伸びも縮みもしない。

(ii) $\omega \ll \omega_n$ のとき

このとき、 $\nu \ll 1$ より、

$$T_f(\nu) \sim 1 \quad (4.18)$$

よって、振動伝達率は原点に近い低振動数領域でほぼ 1 である。

(iii) $\omega = \omega_n$ のとき

このとき、 $\nu = 1$ より、

$$T_f(\nu) = 1 - \frac{i}{2\zeta} \quad (4.19)$$

よって、固有振動数で加振したとき、振動伝達率は実部が正、虚部が負の複素数であり、振幅比と位相遅れは、

$$|T_f(\nu)| = \sqrt{1 + \frac{1}{4\zeta^2}} \quad (4.20)$$

$$-\angle T_f(\nu) = \tan^{-1} \frac{1}{2\zeta} \quad (4.21)$$

である。

(iv) $\omega = \sqrt{2}\omega_n$ のとき

このとき、 $\nu = \sqrt{2}$ より、

$$|T_f(\nu)| = 1 \quad (4.22)$$

よって、振動伝達率の振幅比は、減衰比によらず 1 になる。

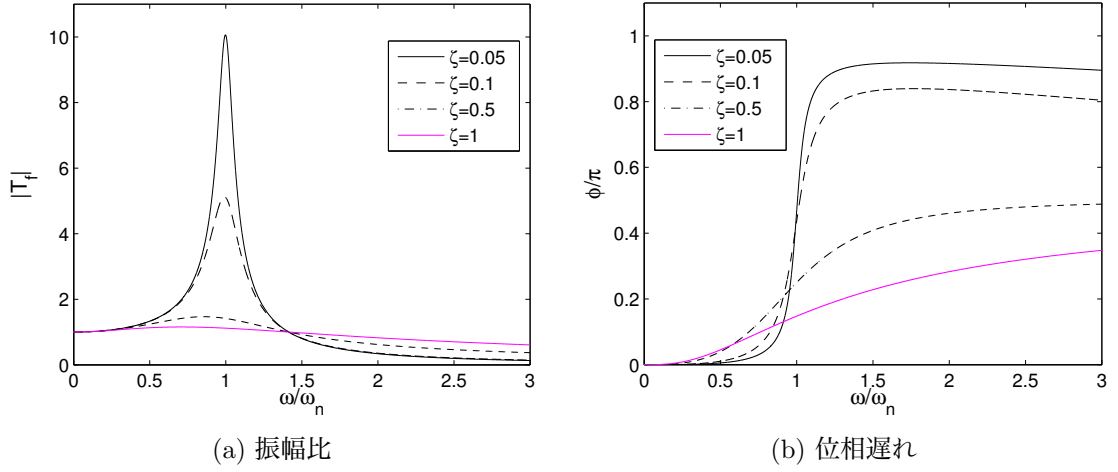


Fig. 4.2 振動伝達率の共振曲線

(v) $\omega \gg \omega_n$ のとき

このとき、 $\nu \gg 1$ より、

$$T_f(\nu) \sim -i \frac{2\zeta}{\nu} \quad (4.23)$$

よって、振動伝達率は高振動数領域でほぼ虚部が負の純虚数であり、その大きさ（絶対値）は加振振動数に反比例して減少する。

(vi) $\omega = \infty$ のとき

このとき、 $\nu = \infty$ より、

$$T_f(\nu) = 0 \quad (4.24)$$

よって、振動伝達率は高振動数領域でゼロに漸近する。

振動伝達率の振幅比と位相遅れを描いた共振曲線を図 4.2 に示す。上で述べたことが確認できよう。特に、減衰比にかかわらず、曲線が $\omega/\omega_n = \sqrt{2}$, $|T_f| = 1$ を通ることは特筆に値する。同様に、振動伝達率のボード線図を図 4.3 に、コクアド線図とベクトル軌跡を図 4.4, 図 4.5 にそれぞれ示す。図 4.6 には、ベクトル軌跡の原点付近の拡大図を示す。 $\omega \rightarrow \infty$ で位相遅れが $\pi/2$ に収束することがわかる。

4.2.3 相対変位応答

次は、支持点の変位として正弦波を与えた場合の、質点の相対変位の定常応答を求めよう。運動方程式 (4.5) より、

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = m\omega^2 Y e^{i\omega t} \quad (4.25)$$

定常相対変位解を、

$$z(t) = Z e^{i\omega t} \quad (4.26)$$

とおいて式 (4.25) に代入し、複素振幅 Z について解くと、

$$Z = \frac{m\omega^2}{-m\omega^2 + ic\omega + k} Y \quad (4.27)$$

となり、よって、定常相対変位応答は、複素表示で、

$$z(t) = \frac{m\omega^2}{-m\omega^2 + ic\omega + k} Y e^{i\omega t} \quad (4.28)$$

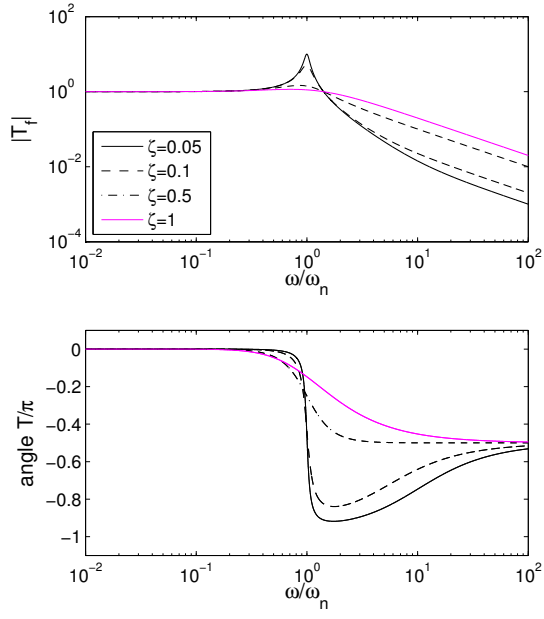


Fig. 4.3 振動伝達率のボーデ線図

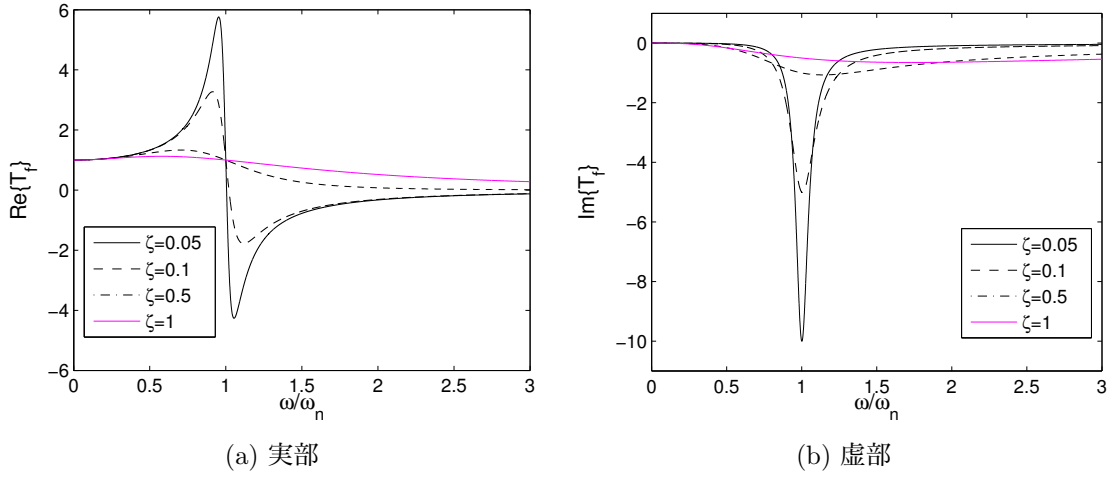


Fig. 4.4 振動伝達率のコクアド線図

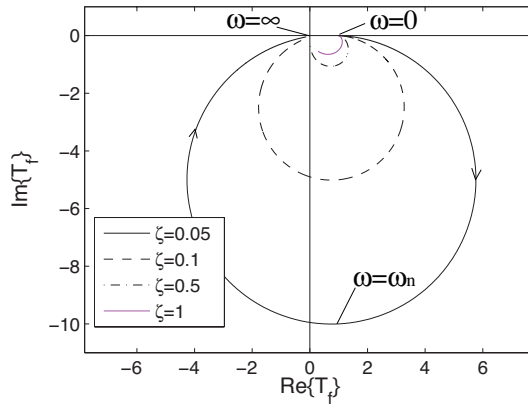


Fig. 4.5 振動伝達率のベクトル軌跡

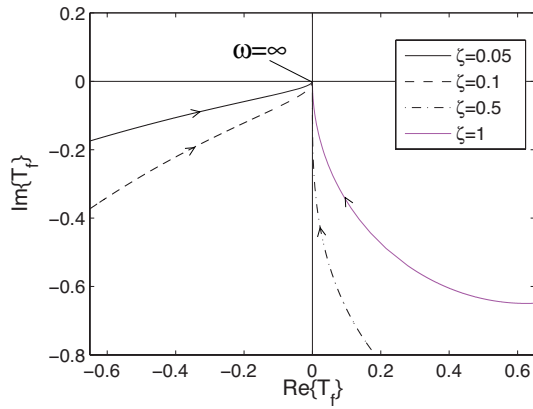
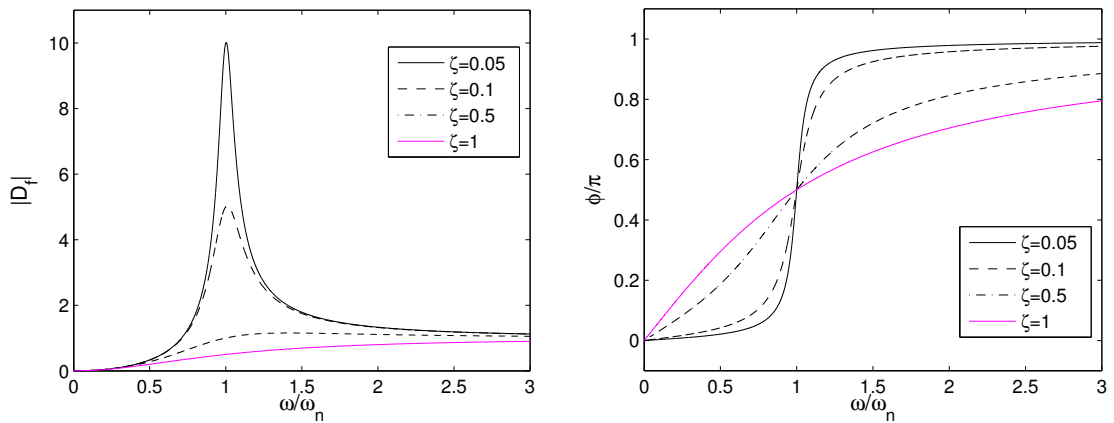


Fig. 4.6 振動伝達率のベクトル軌跡（原点付近の拡大図）



(a) 振幅比

(b) 位相遅れ

Fig. 4.7 支持点変位から質点の相対変位への周波数応答関数の共振曲線

となる。なお、相対変位は絶対変位から支持点の変位を引いたものだから、式 (4.9) から $Y e^{i\omega t}$ を引いても同じ結果が得られる。

支持点変位から質点の相対変位への周波数応答関数は、

$$D_f = \frac{m\omega^2}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \quad (4.29)$$

となる。式 (4.29) は、アクセラランス（式 (3.23)）に $-m$ を掛けたものと等しい。共振曲線を図 4.7 に、ベクトル軌跡を図 4.8 にそれぞれ示す。

4.3 振動絶縁

機械や構造物の振動を抑制することを考える場合、第 1 章で述べたとおり、その考え方は大きく分けると次の二つである：

- エネルギーの流入を減らす；
- エネルギーの消散を増やす。

振動を抑えたい対象物（制振対象）と振動源が一体ではなく離れている場合には、一つ目の考え方が有効である。極端な話、振動源と制振対象を力学的に切り離してしまえばよいのである。そうすれば、制振対象に振動が伝達

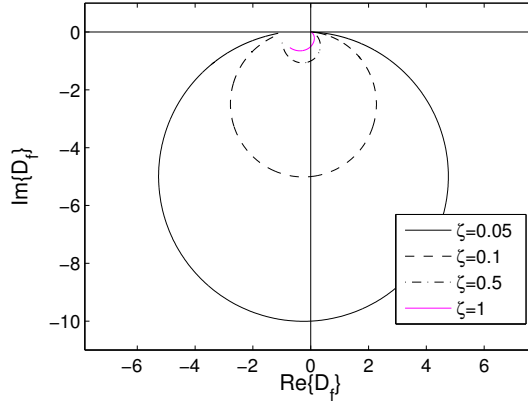


Fig. 4.8 支持点変位から質点の相対変位への周波数応答関数のベクトル軌跡

されることはない。したがって、可能であればそのような設計を行うべきである。しかし多くの場合、そのような設計は難しいのであって、たとえば、

- **地震による構造物振動**：地面（振動源）と構造物（制振対象）は、構造物の自重支持のため連結されている。これらを分離するには構造物を宙に浮かせるしかない。明らかにそのような設計は非現実的である。
- **車や鉄道車両の振動**：地面や軌道面の凹凸（振動源）と車体（制振対象）は自重支持および推進力を得るために接触している。これらを分離することはできない（分離すると別の乗り物になってしまう）。
- **車体に伝わるエンジンの振動**：エンジン（振動源）と車体（制振対象）の取り付け部からエンジンの振動が車体に伝わる。設計上、これらを分離することは不可能。

このように、振動源と制振対象とを完全に分離できないのが普通である。しかし、そのような場合でも、両者を「動的な意味で」分離することは可能なのである。それが、ここで述べる**振動絶縁**である。なお、振動絶縁という場合、制振対象を振動系、振動源を支持点の強制変位としてモデル化して、支持点変位に対する系の応答を評価する場合（上の一つ目と二つ目の例）と、振動源を振動系としてモデル化して、系から支持点に伝達される力を評価する場合（上の三つ目の例）があるが、後で示すように両者は同じダイナミクスに支配される。

まず前者を考えよう。制振対象を質点で、その支持構造をバネとダッシュポットで表現し、振動源からの入力を支持点の強制変位で表現すると、これは図 4.1 の基礎励振系となり、そのダイナミクスは運動方程式 (4.2) で表される。式 (4.2) の右辺には、支持点の変位と速度が含まれており、これらが外力項として働いていることがわかる。したがって、 k と c をゼロにしてやれば系に対する外力はゼロとなり、当然のことであるが振動は生じない。これは振動源と制振対象を完全に切り離すことを意味している。しかし上述のように、このような処置は困難であるため、できるだけ小さな剛性と減衰を持った支持構造で両者を連結することになる。これが**振動絶縁の基本**である。では、定量的に、剛性や減衰をどの程度小さくとればよいのか、次に考えてみよう。

振動絶縁を考えると、支持点（加振源）の強制変位が与えられたときの質点（制振対象）の絶対変位応答の大きさが問題であるので、その効果は式 (4.10) の振動伝達率（変位伝達率）で評価できる。再掲すると、

$$T_f = \frac{ic\omega + k}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \quad (4.30)$$

であり、その絶対値（変位振幅比）は、

$$|T_f| = \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (4.31)$$

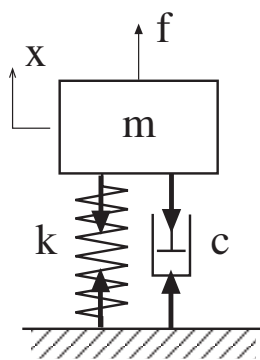


Fig. 4.9 基礎に伝達される力

である．変位振幅比のグラフは図 4.2(a) に描いたとおりであり，振幅比が 1 未満となる領域，すなわち $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ で振動絶縁ができていくことになる．つまり，振動源の振動数の下限に対して，固有振動数がその $1/\sqrt{2}$ 未満となるように，支持構造の剛性を設計すればよい．また， $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ の振動絶縁領域での振幅比に着目すると，振動数比 ω/ω_n が大きいほど振動絶縁効果が大きいことがわかる．また，減衰比が小さいほど振動絶縁効果がよいことがわかる．これは，減衰比が大きいと減衰要素を通じて力が伝達されてしまうためであり，その極限は $c = \infty$ の剛結合である．

地震による構造物振動の場合は，評価関数として**加速度伝達率**が用いられる．加速度伝達率とは，支持点の加速度から質点の絶対加速度応答への周波数応答関数のことである．加速度伝達率が用いられる理由は，加振源である地面の運動が，通常，加速度波形で表現される（地震計とは，後で説明する加速度センサそのものである．ちなみに地震の加速度を表す単位 gal は cm/s^2 のこと． $980 \text{ gal} \simeq 1\text{G}$ である．）ことと，構造物の受ける動的な荷重が絶対加速度応答に比例することによる．加速度伝達率も式 (4.30) と全く同じであり，上と同様の議論が成り立つ．

次に，振動源を振動系としてモデル化する場合を考える．振動源を，図 4.9 のように外力による加振を受ける振動系としてモデル化し，振動源から基礎に伝達される力を考えよう．運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (4.32)$$

であり，基礎に伝達される力は $c\dot{x}(t) + kx(t)$ であるから，外力から伝達力までの周波数応答関数（**力伝達率**）は，

$$T_f(\omega) = \frac{ic\omega + k}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \quad (4.33)$$

となり，先ほどの変位（または加速度）伝達率の式と一致する．

さて，以上のことから，振動絶縁効果だけを考慮するなら，できるだけ振動数比が大きな領域で使用し，なおかつ減衰を小さくすればよいことがわかる．そのためには，支持構造のバネ定数と減衰係数をできるだけ小さく設計すればよい．しかし実際にそのような設計をすると，何かの拍子に系が自由振動を始めたとき振動を止めることができない．したがってある程度の減衰は必要である．しかし過大な減衰は高振動数領域での絶縁効果を悪化させるため，うまく設計上の妥協点を探す必要がある．設計の効率化のために，支持構造をコンポーネント化して適切なバネ定数と減衰特性を持たせたものを，振動源と制振対象の間に挿入することが行われる．そのような装置を**振動絶縁装置**という．乗り物のサスペンションは振動絶縁装置の一種と見ることができる．地震から建物を保護するための免震装置，エンジンの振動がボディに直接伝わることを防止するためのエンジンマウントも振動絶縁装置である．

なお，鉛直方向の振動絶縁を行う場合には，絶縁装置は振動絶縁と同時に重量を支持する必要があるため，大荷重を支持しつつ軟らかさを確保することが求められる．そのような場合に用いられるのが**空気バネ**であり，産

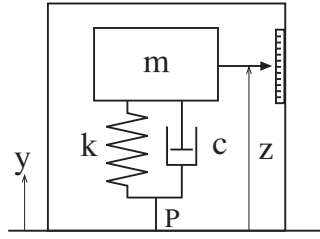


Fig. 4.10 サイズモ系

業機械の防振用，除振台，乗り物のサスペンションなどに多用されている．空気バネにおいては，静的荷重，バネ定数，減衰特性を独立に設計することができる．

4.4 振動センサ*

基礎励振系のもう一つの重要な応用として，振動センサについて述べよう．物体の振動を計測するためには，注目する点の変位，速度や加速度を計測すればよいのであるが，その方法はいろいろある．大きく分けると，

- 固定参照点を必要とする方法
- 固定参照点を必要としない方法

がある．ここで固定参照点とは，長さ計測の基準となる固定点のことである．直感的には2番目の方法というのにはあり得ないように思えるが，1自由度系の強制振動の理論を応用すれば可能なのである．ここでは，その方法のあらましについて述べる．

図4.10のような振動系を，振動を測定したい点に取り付ける．振動系の振動方向は，測定したい振動の軸方向にそろえる．振動系は，質量・バネ・ダッシュポットからなり，バネの変形量，つまり，取り付け点を基準とする質点の相対変位を計測する手段を有するものとする．このような振動系を**サイズモ系**という．ここで，質点の相対変位を計測することによって，取り付け点の絶対変位や絶対加速度を知ることができるかを考えてみよう．

まず，運動方程式をたてる．図4.10のサイズモ系は，図4.1の基礎励振系そのものであるから，運動方程式は，

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = -m\ddot{y}(t) \quad (4.34)$$

と表される．ここで相対変位 $z(t)$ を用いた定式化を採用したのは，計測するのが相対変位 $z(t)$ であるからである．まず， $y(t) = Ye^{i\omega t}$ ， $z(t) = Ze^{i\omega t}$ とおくと，取り付け点の絶対変位 $y(t)$ と相対変位 $z(t)$ の関係を表す周波数応答関数を得る（式(4.29)と同じ）．

$$\frac{Z}{Y} = \frac{m\omega^2}{-m\omega^2 + ic\omega + k} = \frac{\nu^2}{1 - \nu^2 + i2\zeta\nu} \quad (4.35)$$

ここで， $\nu = \omega/\omega_n$ である．また，取り付け点の絶対加速度 $\ddot{y}(t)$ と相対変位 $z(t)$ の関係を表す周波数応答関数は，

$$\frac{Z}{-\omega^2 Y} = \frac{-m}{-m\omega^2 + ic\omega + k} = -\frac{1}{\omega_n^2} \frac{1}{1 - \nu^2 + i2\zeta\nu} \quad (4.36)$$

となる．これらの共振曲線を，ボーデ線図の形式で図4.11と図4.12に示す．これらの図より，次のことが言える：

- **変位センサとしての利用**：相対変位 $z(t)$ を計測することによって，取り付け点の絶対変位 $y(t)$ を知るためには，サイズモ系の固有振動数を，計測したい振動の振動数の下限より十分低く設計すればよい．理想的には， $\zeta = 0$ で ω/ω_n が10倍以上あればよいが，そのような設計は困難である場合が多いので，位相特性を犠牲にして， $\zeta = 0.6$ 程度とし， ω/ω_n を1.2倍以上として設計する場合が多い．この形式のサイズモ系に相対

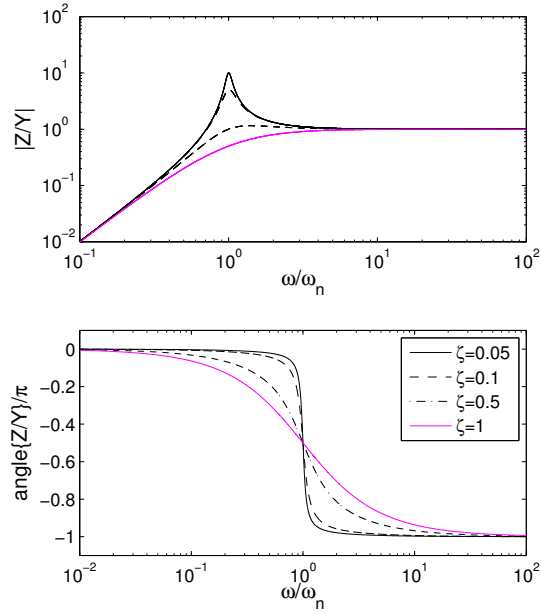


Fig. 4.11 式 (4.35) のボデ線図

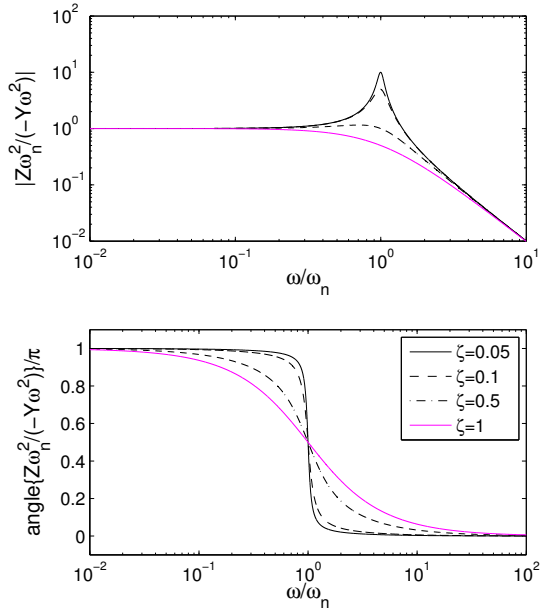


Fig. 4.12 式 (4.36) のボデ線図

変位の検出手段として磁石と可動コイルを用いた動電型ピックアップは、相対速度に比例した電圧を出力するため**速度ピックアップ**と呼ばれ、回転機械の振動レベル監視などに用いられている。

- **加速度センサとしての利用**：相対変位 $z(t)$ を計測することによって、取り付け点の絶対加速度 $\ddot{y}(t)$ を知るためには、サイズモ系の固有振動数を、計測したい振動の振動数の下限より十分高く設計すればよい。理想的には、 $\zeta = 0$ で ω/ω_n が $1/3$ 以下程度であればよく、実際にそのような設計が行われる。相対変位の検出手段としては、圧電セラミックが用いられることが多く、**圧電型加速度ピックアップ**と呼ばれている。圧電型加速度ピックアップの場合は、圧電素子の特性上、0Hz 成分を計測することはできない。典型的なスペックとしては、計測可能な振動数の下限が $1\sim 3\text{Hz}$ 程度、上限が $10\sim 20\text{kHz}$ 程度である。

演習問題 4

- [1] 加速度伝達率が式 (4.30) のようになることを示せ.
- [2] 力伝達率が式 (4.33) のようになることを示せ.
- [3] 乗り物の乗り心地を評価する場合, 路面の上下 (すなわち支持点の変位) に対する車体の加速度 (すなわち質点の絶対加速度) 応答振幅が主要な評価関数になる. 運動方程式 (4.2) から出発して, 質点の絶対加速度応答の複素振幅を支持点の変位の複素振幅で除した周波数応答関数の式を導け.

第5章

定常応答に関する補遺

5.1 運動方程式の各項の振幅・位相関係

定常状態における応答の振幅・位相関係を，運動方程式の項別に見てみよう．複素振幅表示の方法を使い，

$$f(t) = Fe^{i\omega t}, \quad x(t) = Xe^{i\omega t} = x_0 e^{i\omega t - \varphi} \quad (5.1)$$

と書くところからスタートする．ただし， $x_0 = |X|$ ， $\varphi = -\angle X$ である．上記の $f(t)$ と $x(t)$ は複素平面上を原点を中心として角速度 ω で回転する円運動を表している． $f(t)$ の半径は F ， $x(t)$ の半径は x_0 であり， $x(t)$ は $f(t)$ より角度 φ だけ遅れて回転している．次に，速度応答，加速度応答について考えると，

$$\dot{x}(t) = i\omega x_0 e^{i\omega t - \varphi} = \omega x_0 e^{i\omega t - \varphi + \pi/2}, \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t - \varphi} \quad (5.2)$$

と表すことができ，やはり複素平面上を原点を中心に角速度 ω で回転する円運動となる．

これらを用いて運動方程式の各項を表すと，慣性力，減衰力，復元力は，それぞれ，

$$m\ddot{x}(t) = -m\omega^2 x_0 e^{i\omega t - \varphi}, \quad c\dot{x}(t) = c\omega x_0 e^{i\omega t - \varphi + \pi/2}, \quad kx(t) = kx_0 e^{i\omega t - \varphi} \quad (5.3)$$

となる．そこでこれらの各項と外力項との相対的な位相関係を図 5.1 のベクトル図で表してみよう．図に表示された矢印は複素平面上を角速度 ω で回転する各項のある瞬間におけるスナップショットである．ベクトルの長さはそれぞれの項の振幅を，ベクトル間の角度は互いの位相関係を表している．外力に対して変位応答は φ だけ遅れており，復元力は変位と同位相，減衰力，慣性力は変位に対して 90 度，180 度だけ進んでいる様子が表されている．そして，運動方程式が成立するために，外力を表すベクトルは，慣性力，減衰力，復元力を表すベクトルの和と一致していなければならない．

まず，加振振動数 ω が固有振動数 ω_n よりずっと小さいときを考える．このときのベクトル図は図 5.2 (a) のようになる．すなわち慣性力，減衰力ベクトルの長さは復元力に比べて小さいため，慣性力，減衰力，復元力ベク

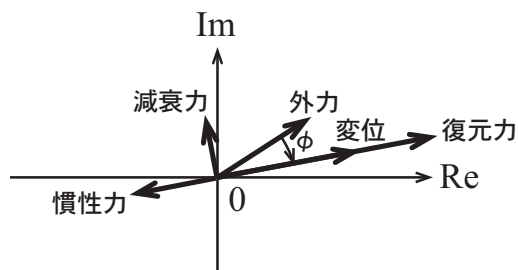


Fig. 5.1 ベクトル図 (矢印は角速度 ω で反時計回りに回転するベクトル)

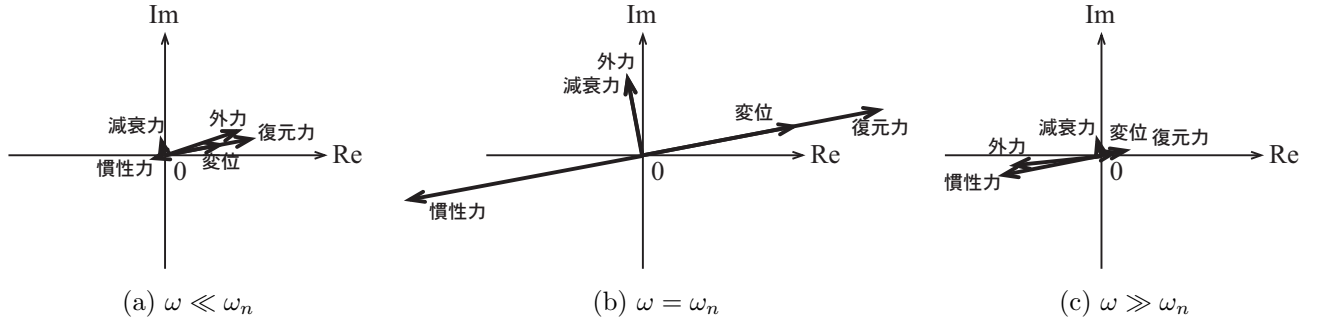


Fig. 5.2 ベクトル図

トルの和はほとんど復元力ベクトルそのものである。したがって、外力ベクトルは主に復元力ベクトルと釣り合うことになり、外力に対する変位応答の位相遅れはほぼ 0 になる。そして変位ベクトルの大きさは外力ベクトルの大きさのほぼ $1/k$ となることが理解できよう。

加振振動数 ω が増加すると、減衰力、慣性力のベクトルが長くなる。したがって、慣性力、減衰力、復元力ベクトルの和、すなわち外力ベクトルは変位ベクトルに対して進んでいなければならない、その進み角は ω の増加とともに増加していく。逆に外力から見ると変位応答は遅れていなければならない、その位相遅れは ω の増加とともに増加する。

加振振動数が固有振動数に一致するとき、 $m\omega^2 = k$ となるため慣性力ベクトルと復元力ベクトルの長さが等しくなり、両者は打ち消し合う。このとき、図 5.2 (b) のように外力は減衰力のみと釣り合う。すなわち外力から見ると変位は 90 度遅れていなければならない。また、このことは外力と応答速度が同位相であることを表している。

加振振動数が固有振動数より大きくなると、慣性力ベクトルのほうが復元力ベクトルより長くなり、外力に対する変位応答の遅れは 90 度より大きくなる。さらに加振振動数を大きくしていくと、ベクトル図は図 5.2 (b) のようになり、外力はほぼ慣性力のみと釣り合う。すなわち外力に対する変位応答の遅れはほぼ 180 度になる。

5.2 定常応答のエネルギー収支

第 1 章で 1 自由度系のエネルギーの釣り合いが式 (1.36) あるいは式 (1.37) と書けることを述べた。これを再掲すると、

$$T(t) + U(t) = E_0 - D(t) + W(t) \quad (5.4)$$

ただしここでは、初期エネルギー項（右辺第 1 項）を除く各項が時間によって変化することを強調して、時間引数を明示してある。

さて、 ω なる加振振動数を有する正弦波外力 $f(t) = F \cos \omega t$ に対する定常状態を考えよう。このとき外力の周期は $\tau = 2\pi/\omega$ である。系が定常状態になると応答は外力と同じ周期を持つ周期的運動となり、任意の時刻 t_0 とそれから 1 周期後の時刻 $t_0 + \tau$ における系の状態は全く同じになる。したがって、これら 2 時刻における運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーは等しい。このことから、

$$T(t_0 + \tau) - T(t_0) = 0 \quad (5.5)$$

$$U(t_0 + \tau) - U(t_0) = 0 \quad (5.6)$$

実際、これらは計算によっても確かめることができる。まず、 $x(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi)$ とする。運動エネルギーが

$$T(t) = \int m \ddot{x} dx = \int m \dot{x}(t) \dot{x}(t) dt \quad (5.7)$$

だったことに注意すると、式 (5.5) の左辺は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
T(t_0 + \tau) - T(t_0) &= \int_{t_0}^{t_0 + \tau} m\ddot{x}(t)\dot{x}(t)dt \\
&= m\omega^3 x_0^2 \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \cos(\omega t - \varphi) \sin(\omega t - \varphi) dt \\
&= m\omega^3 x_0^2 \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \frac{\sin(2\omega t - 2\varphi)}{2} dt \\
&= -m\omega^2 x_0^2 \left[\frac{\cos(2\omega t - 2\varphi)}{4} \right]_{t_0}^{t_0 + \tau} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.8}$$

上式は、慣性力項が 1 周期中になす仕事の総和がゼロであることを意味している。仕事の総和がゼロであるがゆえに、エネルギーは 1 周期後に増加も減少もしないわけである。(もちろん 1 周期の中での増減はある。)

同様に、式 (5.6) の左辺についても、

$$\begin{aligned}
U(t_0 + \tau) - U(t_0) &= \int_{t_0}^{t_0 + \tau} kx(t)\dot{x}(t)dt \\
&= -k\omega x_0^2 \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \cos(\omega t - \varphi) \sin(\omega t - \varphi) dt \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.9}$$

となる。

次に、 $t = t_0, t = t_0 + \tau$ において式 (5.4) を作り、辺々引くと、式 (5.5)、式 (5.6) より、

$$W(t_0 + \tau) - W(t_0) = D(t_0 + \tau) - D(t_0) \tag{5.10}$$

を得る。 $W(t), D(t)$ がそれぞれ、時刻 t までに外力が系に対して与えた仕事、時刻 t までにダッシュポットが消費したエネルギー、であることに注意すると、上式は、

1 周期の間に外力が系に対して与えた仕事 = 1 周期の間にダッシュポットが消費したエネルギーであることを示している。つまり、1 周期の間に系に入ったエネルギーと出たエネルギーのバランスがとれているということである。だからこそ、系の応答が定常的になっているともいえる。

もちろん、式 (5.10) は応答解から直接導くことも出来る。まず左辺を計算すると、

$$\begin{aligned}
W(t_0 + \tau) - W(t_0) &= \int_{t_0}^{t_0 + \tau} f(t)\dot{x}(t)dt \\
&= -\omega x_0 F \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \cos(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) dt \\
&= -\omega x_0 F \cos \varphi \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \cos \omega t \sin \omega t dt + \omega x_0 F \sin \varphi \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \cos \omega t \cos \omega t dt \\
&= \pi x_0 F \sin \varphi
\end{aligned} \tag{5.11}$$

右辺は、

$$\begin{aligned}
D(t_0 + \tau) - D(t_0) &= \int_{t_0}^{t_0 + \tau} c\dot{x}(t)\dot{x}(t)dt \\
&= c\omega^2 x_0^2 \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \sin(\omega t - \varphi) \sin(\omega t - \varphi) dt \\
&= \pi c\omega x_0^2
\end{aligned} \tag{5.12}$$

ここで、 $\sin \varphi = \frac{-\text{Im}\{G_f(\omega)\}}{|G_f(\omega)|} = \frac{c\omega}{F/x_0}$ より、式 (5.10) が成立する。

第6章

まとめ演習：1自由度系の定常応答

ここで、この講義の前半の要である1自由度系の定常応答の解き方について、演習問題の形でまとめておく。基本問題については解答を詳しく解説するが、応用問題については解答の概要のみ与える。基本問題の解答を参考に各自で補完されたい。

演習問題：力励振を受ける系の定常応答

- [1] 図 1.1 の 1 質点系に $f(t) = F \cos \omega t$ なる正弦波外力が作用する場合の定常変位応答 $x(t)$ を求めよ。また、 $f(t) = F \sin \omega t$ の場合はどうか。【基本問題】
- [2] 左端を回転自由なジョイントで支持された「てこ」と質点、ばね、ダッシュポットからなる図 6.1 の振動系に、 $f(t) = F \cos \omega t$ なる垂直方向の外力が作用する場合の定常応答 $x(t)$ を求めよ。ただし、てこの腕には質量がなく無限大の剛性を持つとし、外力が作用しないとき腕は水平を保つよう調整されているとする。また、振動振幅は微小であると仮定せよ。【応用問題】

解答

- [1] 運動方程式は、

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F \cos \omega t \quad (6.1)$$

である。複素振幅表示の方法を用いて定常応答を求めるために、問題を次のように書き換える。

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = Fe^{i\omega t} \quad (6.2)$$

さらに、定常応答を $x(t) = Xe^{i\omega t}$ と仮定して、上式に代入する。ここで、 X は変位応答の複素振幅である。すると、

$$(-m\omega^2 + ic\omega + k)Xe^{i\omega t} = Fe^{i\omega t} \quad (6.3)$$

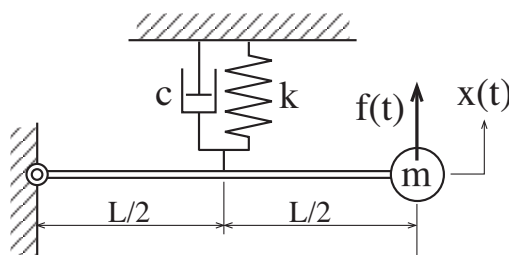


Fig. 6.1 てこと質点からなる振動系

よって、複素振幅 X は、

$$X = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k} F \quad (6.4)$$

と求まり、式 (6.2) に対する定常解は次式のようになる、

$$x(t) = X e^{i\omega t} = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k} F e^{i\omega t} \quad (6.5)$$

元の問題（運動方程式 (6.1)）に対する解は、上式の実部をとることによって求められる、

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ X e^{i\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ |X| e^{i\angle X} e^{i\omega t} \} = |X| \cos(\omega t + \angle X) \quad (6.6)$$

したがって、定常応答は以下のようになる、

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (6.7)$$

ここで、振幅 x_0 は、

$$x_0 = |X| = \frac{1}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} F \quad (6.8)$$

位相遅れ φ は、

$$\varphi = -\angle X = \tan^{-1} \frac{c\omega}{-m\omega^2 + k} \quad (6.9)$$

また、 $f(t) = F \sin \omega t$ の場合の定常解は、式 (6.5) の虚部をとって、

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (6.10)$$

となる。むろん、振幅 x_0 と位相遅れ φ は、式 (6.8)、式 (6.9) と同じである。

[2] 運動方程式は、

$$m\ddot{x}(t) + \frac{1}{4} \{ c\dot{x}(t) + kx(t) \} = F \cos \omega t \quad (6.11)$$

である。これに、[1] の手順を適用して、定常応答解は、

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (6.12)$$

$$x_0 = \frac{4}{\sqrt{(-4m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}} F \quad (6.13)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{-4m\omega^2 + k} \quad (6.14)$$

と求められる。(途中は各自で補完すること)

演習問題：変位励振を受ける系の定常応答

[1] 図 4.1 の 1 質点系に $y(t) = Y \cos \omega t$ なる正弦波強制変位が与えられる場合の、定常状態における絶対変位応答 $x(t)$ を求めよ。また、 $y(t) = Y \sin \omega t$ の場合はどうか。【基本問題】

[2] ダッシュポットの下端に強制変位励振を受ける図 6.2 の振動系の定常状態における絶対変位応答 $x(t)$ を求めよ。ただし強制変位を $y(t) = Y \cos \omega t$ とせよ。【応用問題】

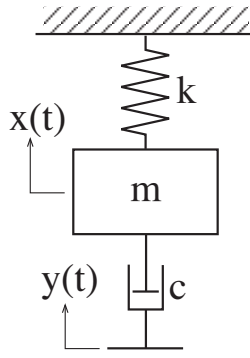


Fig. 6.2 変位励振をうける系

解答

[1] 運動方程式は,

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = c\dot{y}(t) + ky(t) \quad (6.15)$$

である. 複素振幅表示の方法を用いて定常応答を求めるために,

$$x(t) = Xe^{i\omega t}, \quad y(t) = Ye^{i\omega t} \quad (6.16)$$

として式 (6.15) に代入する. ここで, X は変位応答の複素振幅である. すると,

$$(-m\omega^2 + ic\omega + k)Xe^{i\omega t} = (ic\omega + k)Ye^{i\omega t} \quad (6.17)$$

よって, 複素振幅 X は,

$$X = \frac{ic\omega + k}{-m\omega^2 + ic\omega + k}Y \quad (6.18)$$

と求まり, 複素数表現した定常解は次式のようなになる.

$$x(t) = Xe^{i\omega t} = \frac{ic\omega + k}{-m\omega^2 + ic\omega + k}Ye^{i\omega t} \quad (6.19)$$

元の問題 (運動方程式 (6.15)) に対する解は, 上式の実部をとることによって求められる.

$$x(t) = \operatorname{Re}\{Xe^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{|X|e^{i\angle X}e^{i\omega t}\} = |X|\cos(\omega t + \angle X) \quad (6.20)$$

したがって, 定常応答は以下のようなになる.

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (6.21)$$

ここで, 振幅 x_0 は,

$$x_0 = |X| = \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(-m\omega^2 + k)^2 + (c\omega)^2}}Y \quad (6.22)$$

位相遅れ φ は,

$$\varphi = -\angle X = -\tan^{-1} \frac{c\omega}{k} + \tan^{-1} \frac{c\omega}{-m\omega^2 + k} \quad (6.23)$$

また, $y(t) = Y \sin \omega t$ の場合の定常解は, 式 (6.19) の虚部をとって,

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (6.24)$$

となる. 振幅 x_0 と位相遅れ φ は, 式 (6.22), 式 (6.23) と同じである.

[2] 運動方程式は,

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = c\dot{y}(t) \quad (6.25)$$

である. $y(t) = Ye^{i\omega t}$, $x(t) = Xe^{i\omega t}$ として計算すると, 絶対変位応答の複素振幅は,

$$X = \frac{i c \omega}{-m \omega^2 + i c \omega + k} Y \quad (6.26)$$

よって, 定常応答解は,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (6.27)$$

$$x_0 = \frac{c \omega}{\sqrt{(-m \omega^2 + k)^2 + (c \omega)^2}} Y \quad (6.28)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{c \omega}{-m \omega^2 + k} \quad (6.29)$$

と求められる. (途中は各自で補完すること)

第7章

1 自由度系の強制振動（4）：過渡応答

7.1 過渡応答とは

これまでの定常応答の解析では、外力は一定振幅、一定振動数の正弦波で無限の過去から無限の未来まで続くものであるという考え方をした。すなわち、初期時刻から十分に長い時間が経過した後の応答、つまり初期条件の影響が消失した後の状態（定常状態）を考えて、正弦波外力と同期する解を構成した。

それに対して、**過渡応答**とは、系が定常状態に至るまでの途中の経過のことをいう。ここで言う「定常状態」とは、上述の正弦波加振に対する定常状態に限らず、広く「応答の性質に時間的変化が無くなった状態」を意味する。たとえば、力が静的に釣り合う平衡点に系が到達した状態も「定常状態」である。したがって、初期時刻に開始した正弦波加振に対する応答が一定振幅・一定振動数の正弦波に収束するまでの途中経過も過渡応答であるし、衝撃的な外力に対する応答が次第に減衰して平衡状態（つまり変位ゼロの点）に至るまでの途中経過も過渡応答と呼ばれる。その意味では、初期変位や初期速度によって生じる自由振動も過渡応答の一種である。

第1章で見たように、線形な振動系が励振されたときの応答は、「外力によって励起された振動成分」と「自由振動成分」の和からなるのであった。数学的には、前者は「非斉次微分方程式の特解」、後者は「斉次微分方程式の一般解」に相当する。（ここで、第1章1.3節を復習されたい。）

通常の振動系は減衰を有するため、「自由振動成分」は減衰自由振動であり、時間の経過とともに減衰して、十分な時間が経過した後は消滅する。じっさい、正弦波加振を受ける系の定常応答は「自由振動成分」が消滅した後の状態を扱ったものであった。これに対して、過渡応答解析では「自由振動成分」が消滅する前の世界に興味があるわけで、したがって、両者を区別して取り扱うことにはあまり意味がない。（ただし、以下で述べるように解法テクニックとして上述の構造を用いることはある。）要は、外力項が存在する微分方程式の初期値問題を、真正面から解けばよいのである。

過渡応答を求めること＝微分方程式の初期値問題を解くこと、であるから、その解法はおもに三つである：

- **斉次微分方程式の一般解と特解の和として求める方法 (1)**：特解は推察によって求める。初期条件を満たすように、一般解に含まれる任意定数を定める。
- **斉次微分方程式の一般解と特解の和として求める方法 (2)**：特解は定数変化法によって求める。初期条件を満たすように、一般解に含まれる任意定数を定める。
- **ラプラス変換による方法**：解を一般解と特解の和と考えたりせず、一気に求める。

本章では、一つ目の方法の例として、正弦波加振を受ける系が定常状態に至るまでの過渡応答について述べる。三つ目のラプラス変換による方法は、任意の外力に対する応答を求めることができるうえ、解の構造に対して有益な知見を与えてくれるので、後の章で詳しく解説する。二つ目の方法も任意の外力に対する応答を求めることができる一般的な方法であるが、本講義ノートではこれ以上は触れない。

7.2 正弦波外力による過渡応答

ここでは、過渡応答解析全般に対する導入として、正弦波外力が作用する系が定常状態に至るまでの過渡応答を求めてみよう。簡単のため、初期条件は完全静止（初期変位と初期速度がゼロ）としよう。また、外力は初期時刻から始まり、 $F \sin \omega t$ と表されるものとしよう。もちろん、外力が $F \cos \omega t$ となる状況を考えてもよいのだが、力が徐々に立ち上がる $\sin$ 波形のほうが現実的であるので、このように仮定した。すると、次の運動方程式が出发点となる。

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F \sin \omega t \quad (7.1)$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad (7.2)$$

第1章1.3節で述べたように、

$$\text{強制振動応答} = \text{外力による振動成分} + \text{自由振動成分}$$

であり、数学的な表現では、

$$\text{非斉次線形微分方程式の一般解} = \text{特解} + \text{斉次線形微分方程式の一般解}$$

である。このうち、特解とは、微分方程式 (7.1) の解の一つであり、微分方程式 (7.1) を満たすものなら何を採用してもよい。もちろん初期条件式 (7.2) を満たす必要はない。したがって、特解 $x_p(t)$ としては定常応答解を採用すればよい。

$$x_p(t) = x_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (7.3)$$

ただし、

$$x_0 = \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \quad (7.4)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (7.5)$$

である。

いっぽう、斉次線形微分方程式の一般解とは、運動方程式、

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (7.6)$$

の一般解、すなわち自由振動解である。上式の一般解 $x_c(t)$ はすでに第1章1.4節で求めたように、たとえば不足減衰の場合には、式 (1.28) のように書くことができる。再掲すると、

$$x_c(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) + Be^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) \quad (7.7)$$

ここで、 $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n$ である。

以上より、非斉次微分方程式 (7.1) の一般解は、

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_c(t) \\ &= x_0 \sin(\omega t - \varphi) + Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) + Be^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) \end{aligned} \quad (7.8)$$

上式に含まれる任意定数 A および B を、初期条件式 (7.2) を満足するように定めると、過渡応答解として次式を得る。

$$x(t) = x_0 \left[\sin(\omega t - \varphi) + e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ \sin \varphi \cos \omega_d t + \frac{\zeta\omega_n \sin \varphi - \omega \cos \varphi}{\omega_d} \sin \omega_d t \right\} \right] \quad (7.9)$$

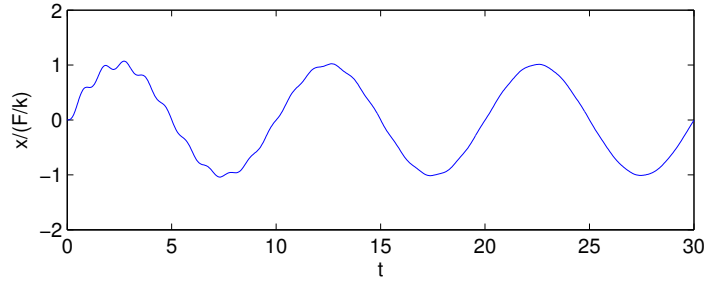


Fig. 7.1 正弦波加振に対する過渡応答 ($\zeta = 0.02, \omega = 0.1\omega_n, x(0) = \dot{x}(0) = 0$)

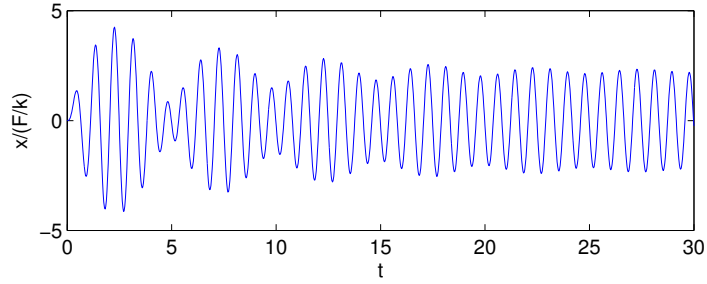


Fig. 7.2 正弦波加振に対する過渡応答 ($\zeta = 0.02, \omega = 1.2\omega_n, x(0) = \dot{x}(0) = 0$)

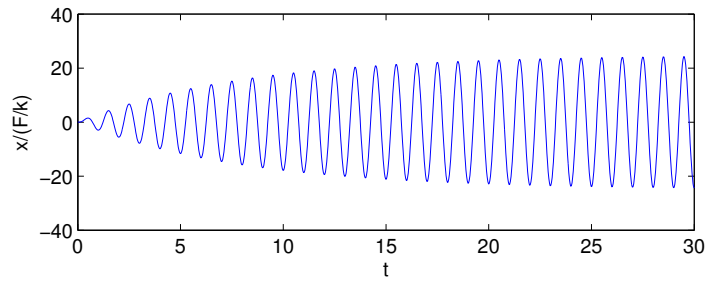


Fig. 7.3 正弦波加振に対する過渡応答 ($\zeta = 0.02, \omega = \omega_d, x(0) = \dot{x}(0) = 0$)

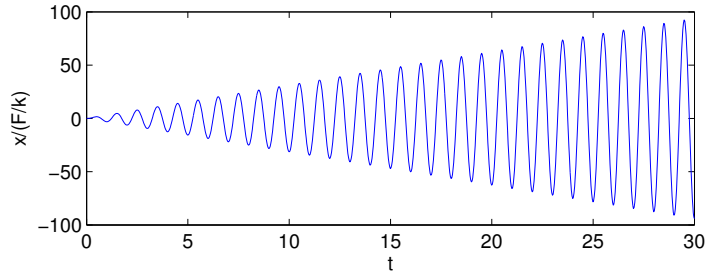


Fig. 7.4 正弦波加振に対する過渡応答 ($\zeta = 0, \omega = \omega_n, x(0) = \dot{x}(0) = 0$)

上式右辺第2項は自由振動成分であり、時間の経過とともに減衰し、ついには第1項のみとなって定常応答に移行する。例として、 $\zeta = 0.02, \omega = 0.1\omega_n$ の場合の過渡応答を図7.1に示す。自由振動数成分が時間の経過とともに減衰し定常応答に移行するさまが見て取れる。

特に、低減衰 ($\zeta \ll 1$) かつ共振的 ($\omega \sim \omega_n$) である場合には、

$$x(t) = x_0 [\sin(\omega t - \varphi) - e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t - \varphi)] \quad (7.10)$$

のように近似でき、励振開始直後には近接した二つの振動数成分が共存して、うなりが生じることがわかる。例として、 $\zeta = 0.02, \omega = 1.2\omega_n$ の場合の過渡応答を図7.2に示す。

さらに、 $\omega = \omega_d$ のときは、

$$x(t) = x_0(1 - e^{-\zeta\omega_n t}) \sin(\omega_d t - \varphi) \quad (7.11)$$

となり、励振開始直後には振幅が時間にほぼ比例して増大し、その後一定振幅 x_0 を持った定常応答に至ることがわかる。図 7.3 に、 $\zeta = 0.02$, $\omega = \omega_d$ の場合の過渡応答を示す。

減衰比を $\zeta \rightarrow 0$ としていくと、 $\omega = \omega_d \rightarrow \omega_n$ で、式 (7.4) より $x_0 \rightarrow \infty$ であるから、励振開始後、振幅は時間に比例して直線的に増大し、無限大に至る（図 7.4）。これが非減衰振動系における共振現象である。

第8章

フーリエ変換とラプラス変換

この章では、線形振動解析の強力なツールとなるフーリエ変換とラプラス変換について学習する。ただし、フーリエ変換やラプラス変換について数学的にできるだけ厳密な議論を行おうとすると、その前提となる関数解析とか複素関数論に言及せねばならず、本来知りたかったことにたどり着く前に息切れしてしまうものである。工学者としては、土台から積み上げるアプローチを取らずに、むしろまずは厳密さを捨てて表面からなぞっていき、自分の知識や理解が豊かになるにつれて少しずつ掘り下げていくのがよい。その意味では、本講義でフーリエ変換やラプラス変換の応用イメージを掴んだ後、数学の厳密な議論に進むのがよいだろう。

8.1 フーリエ変換

まずは定義から。 $x(t)$ は $-\infty$ から ∞ まで続く時間軸上の関数（ここでは振動応答波形）とする。 $x(t)$ のフーリエ変換は次式で定義される。

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (8.1)$$

上式を眺めると、時間波形 $x(t)$ と正弦波 $e^{-i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ を掛けて和をとっている（積分している）ことから、フーリエ変換とは時間波形 $x(t)$ と周波数 ω を持つ正弦波との「類似度」を表すものであると解釈できる。つまり、調べたい波形の山谷の周期と、ある周波数の正弦波の山谷の周期がよく一致すれば、「類似度」はその周波数で大きな値をとる。逆に山谷が全く一致しなければ「類似度」はその周波数で小さな値をとる。いわばいろいろな周波数を持つ正弦波という「テンプレート」を使って波形の特徴付けをしていることになる。

テンプレートの周波数を変えながら「類似度」を求める操作を繰り返すことによって、時間 t についての関数が周波数 ω についての関数に「変換」される。この変換には「逆変換」が存在して、

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (8.2)$$

で完全に元の時間波形に戻る。この式は、元の波形が、波形のフーリエ変換 $\hat{x}(\omega)$ を重みとする正弦波の重ね合わせで表せることを意味している。つまり、ある周波数でフーリエ変換が大きな値をとるときには、元の波形にはその周波数の正弦波「成分」が多く含まれているということになる。フーリエ変換が元の波形と正弦波との「類似度」を表していることを考え合わせれば、このことは直観的に納得できるだろう。

注意すべきポイントと公式を列挙する：

- 振動解析では通常、元の波形 $x(t)$ は実数値であるが、その場合でもフーリエ変換 $\hat{x}(\omega)$ は複素数値をとる。だからフーリエ変換値をグラフに表す際には通常、周波数を横軸に、振幅と位相を縦軸にとった図を組にして用いる。

- ではなぜ逆変換公式 (8.2) で再び実数値に戻るかといえば、元の $x(t)$ が実数なら、

$$\hat{x}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i\omega t} dt = \overline{\hat{x}(\omega)} \quad (8.3)$$

なる関係があり、正の周波数でのフーリエ変換値と負の周波数でのフーリエ変換値が互いに複素共役の関係になるからである。このため、フーリエ変換のグラフは正の周波数領域だけ見せることが多い。

- [重要] 畳み込み積分は積に変換される。すなわち、

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)z(\tau) d\tau \iff \hat{x}(\omega) = \hat{y}(\omega) \cdot \hat{z}(\omega) \quad (8.4)$$

- 時間軸の移動

$$x(t) = y(t-t_0) \iff \hat{x}(\omega) = \hat{y}(\omega)e^{-i\omega t_0} \quad (8.5)$$

- [重要] 時間微分

$$x(t) = \dot{y}(t) \iff \hat{x}(\omega) = i\omega\hat{y}(\omega) \quad (8.6)$$

- 単位インパルス（ディラックのデルタ関数）

$$x(t) = \delta(t) \iff \hat{x}(\omega) = 1 \quad (8.7)$$

ディラックのデルタ関数とは、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)dt = f(a) \quad (8.8)$$

なる性質を持つ超関数で、ものをハンマーで叩いたときの衝撃力を理想化した波形（無限小の時間に無限大の力、力積が1）を表している。

- 正弦波

$$x(t) = e^{i\omega_0 t} \iff \hat{x}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (8.9)$$

フーリエ変換の効用の一つは、信号または波形の「もう一つの見方」を得られるということである。たとえば上で述べたように、単位インパルスのような非常に短時間の現象が、フーリエ変換した世界では広範な周波数域に広がった波形として見え、逆に、正弦波のように時間領域で広がった波形がフーリエ変換した世界では特定の周波数に局在して見える。このように、ある波形があったときに、それを時間領域で眺めたり周波数領域で見たりすることによって、波形の特徴をよりよく理解できるのである。

8.2 ラプラス変換

やはり、まず定義から。

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (8.10)$$

一見してフーリエ変換とよく似ているのがわかるだろう。違うのは、積分区間が0からになっていることと、 $i\omega$ の代わりに s になっていることの二点である。

積分区間が0からということは、 $x(t)$ として、 $t=0$ からスタートする波形を考えていることに等しい。つまり「初期時刻」という概念が自然に入っている。（フーリエ変換では一般に $t=-\infty$ から $t=\infty$ まで続く波形を想定していることに注意。）つまり、これによって初期時刻を明示的に扱うことができるため、微分方程式の初期値問題を考えると非常に都合がよい。

次に、 $i\omega$ の代わりに s となっていることについて、まず s は複素数であることに注意しよう。つまりラプラス変換とは、「時間 t なる実数軸上の関数を、 s で表される複素平面上の関数に写す」変換である。 $s = \sigma + i\omega$ とおけば、

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} dt \quad (8.11)$$

であり、 $t < 0$ で $0, t \geq 0$ でのみ値を持つ波形 $x(t)$ (このような波形を「因果的」という) に指数関数重みを掛けたものをフーリエ変換したものと見ることもできる。また $\sigma = 0$ として考えると、因果的波形のフーリエ変換 $\hat{x}(\omega)$ はラプラス変換 $X(s)$ の虚軸上 $s = i\omega$ における値に他ならないことがわかる。

このようにラプラス変換はフーリエ変換を拡張したものと捉えることができるので、性質もよく似ており、先に紹介したフーリエ変換の公式と同様の公式が成立する。以下の公式で $x(t), y(t), z(t)$ は因果的であるとする。すなわち、

$$x(t) = y(t) = z(t) = 0 \quad (t < 0) \quad (8.12)$$

- 時間軸の移動

$$x(t) = y(t - t_0) \iff X(s) = Y(s) e^{-st_0} \quad (8.13)$$

- [重要] 畳み込み積分は積に変換される。すなわち、

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) z(\tau) d\tau = \int_0^t y(t - \tau) z(\tau) d\tau \iff X(s) = Y(s) \cdot Z(s) \quad (8.14)$$

ただし矢印の左側の二つ目の等号は、 y, z の因果性を考慮して積分区間を書き換えたものである。

- [重要] 時間微分

$$x(t) = \dot{y}(t) \iff X(s) = sY(s) - y(0) \quad (8.15)$$

$$x(t) = \ddot{y}(t) \iff X(s) = s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) \quad (8.16)$$

- 単位インパルス (デルタ関数)

$$x(t) = \delta(t) \iff X(s) = 1 \quad (8.17)$$

- 単位ステップ (ヘビサイド関数)

$$x(t) = u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s} \quad (8.18)$$

ヘビサイド関数 $u(t)$ とは、 $t < 0$ で $0, t \geq 0$ で 1 と定義される関数で、ある時刻から突然作用する一定力を表すことができる。

証明は以下に記す。その他、いろいろな公式が**ラプラス変換表**という形でまとめられている。一部を表 8.1 に示すが、詳しくは適当な参考書を参照されたい。また、ラプラス変換に対する逆変換公式ももちろん存在するが、これを元に計算することは滅多になく、通常はラプラス変換表を用いて逆変換を行う。

- 式 (8.13) の証明：

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} y(t - t_0) e^{-st} dt \\ &= \int_{-t_0}^{\infty} y(t') e^{-s(t' + t_0)} dt' \\ &= \int_0^{\infty} y(t') e^{-st'} dt' e^{-st_0} \\ &= Y(s) e^{-st_0} \end{aligned} \quad (8.19)$$

Table 8.1 ラプラス変換表

$F(s)$	$f(t)$
$F(s-a)$	$e^{at}f(t)$
$F(as+b)$	$\frac{1}{a}e^{-bt/a}f(\frac{t}{a})$
$\frac{1}{s}e^{-cs}$	$u(t-c)$
$e^{-cs}F(s)$	$f(t-c)u(t-c)$
$F_1(s)F_2(s)$	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$\frac{t^n e^{-at}}{n!}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}e^{-at} \sin bt$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cos bt$

- 式 (8.14) の証明：

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty y(t-\tau)z(\tau) d\tau e^{-st} dt \\
&= \int_{-\tau}^\infty \int_0^\infty y(t')z(\tau) d\tau e^{-s(t'+\tau)} dt' \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty y(t')z(\tau) d\tau e^{-s(t'+\tau)} dt' \\
&= \int_0^\infty y(t')e^{-st'} dt' \int_0^\infty z(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\
&= Y(s) \cdot Z(s)
\end{aligned} \tag{8.20}$$

- 式 (8.15) の証明：

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_0^\infty \dot{y}(t)e^{-st} dt \\
&= [y(t)e^{-st}]_0^\infty + s \int_0^\infty y(t)e^{-st} dt \\
&= -y(0) + sY(s)
\end{aligned} \tag{8.21}$$

- 式 (8.16) の証明：

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_0^\infty \ddot{y}(t)e^{-st} dt \\
&= [\dot{y}(t)e^{-st}]_0^\infty + s \int_0^\infty \dot{y}(t)e^{-st} dt \\
&= -\dot{y}(0) + s[y(t)e^{-st}]_0^\infty + s^2 \int_0^\infty y(t)e^{-st} dt \\
&= -\dot{y}(0) - sy(0) + s^2Y(s)
\end{aligned} \tag{8.22}$$

- 式 (8.17) の証明：

$$X(s) = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1 \quad (8.23)$$

- 式 (8.18) の証明：

$$X(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (8.24)$$

8.3 ラプラス変換によって微分方程式の初期値問題を解く方法

先に、ラプラス変換は積分区間が 0 から ∞ になっているために、微分方程式の初期値問題との相性がよいと述べた。それでは、ラプラス変換を使うと、どのようにして微分方程式の初期値問題が解けるのだろうか。簡単な微分方程式を使って説明しよう。1 階の微分方程式の初期値問題

$$\dot{x}(t) = a, \quad x(0) = x_0 \quad (8.25)$$

を考える。明らかに、これは簡単に解けて、

$$x(t) = at + C \quad (8.26)$$

となる。ただし C は積分定数であり、これを初期条件を満足するように選ぶと、

$$x(t) = at + x_0 \quad (8.27)$$

となる。

次に、これをラプラス変換を用いて解いてみよう。まず、微分方程式の両辺をラプラス変換する。式 (8.25) の右辺は $t \geq 0$ で $au(t)$ と書けること、および式 (8.15) と初期条件に注意すると、

$$sX(s) - x_0 = \frac{a}{s} \quad (8.28)$$

これを $X(s)$ について解くと、

$$X(s) = \frac{a}{s^2} + \frac{x_0}{s} \quad (8.29)$$

これで、求めたい関数 $x(t)$ のラプラス変換 $X(s)$ が求められたので、あとはこれを逆ラプラス変換してやればよい。ラプラス変換表 8.1 によって、

$$x(t) = at + x_0 u(t) = at + x_0 \quad (t \geq 0) \quad (8.30)$$

どうだろう？もともとの問題が簡単すぎて、ありがたみが薄いかもしれないが、この解法のポイントは以下の点にある。

- 解きたい微分方程式をラプラス変換し、ラプラス変換領域で解いて、その結果を逆ラプラス変換する。
- 時間領域における微分・積分計算がラプラス変換領域では代数計算になる。
- 微分方程式をラプラス変換する際に、初期条件を取り込むことができる。

時間領域での微積分がラプラス変換領域では代数計算になるため、ラプラス変換領域で解を求める作業は、多くの場合非常にたやすい。初期条件も同時に考慮できるため、積分定数を後から決めるような二度手間もない。問題は、逆ラプラス変換がすんなりと計算できるかどうかであるが、多くの場合、いくつかの標準的なテクニックとラプラス変換表を用いることでクリアできる。

例題：

もう少し現実的な例として，1 質点系の自由振動応答をラプラス変換を用いて求めてみよう．運動方程式と初期条件は，

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (8.31)$$

で与えられるとする．式 (8.31) をラプラス変換すると，

$$m\{s^2X(s) - sx_0 - v_0\} + c\{sX(s) - x_0\} + kX(s) = 0 \quad (8.32)$$

整理すると，

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = (ms + c)x_0 + mv_0 \quad (8.33)$$

これを $X(s)$ について解くと，

$$X(s) = \frac{ms + c}{ms^2 + cs + k}x_0 + \frac{m}{ms^2 + cs + k}v_0 \quad (8.34)$$

特別な場合として， $m = 1, c = 25, k = 100, x_0 = 0$ ，すなわち過減衰系の初期速度応答の場合を考えよう．

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 25s + 100}v_0 \quad (8.35)$$

これを逆ラプラス変換すれば $x(t)$ が求まるわけだが，これを実行するためには**部分分数分解**を用いる．部分分数分解とは，簡単に言えば「通分」操作の逆であり，有理式（分母と分子が多項式であるような関数）を複数のより次数の低い有理式の和に分解する方法である．まず，分母を因数分解して，

$$\frac{1}{s^2 + 25s + 100} = \frac{1}{(s + 5)(s + 20)} = \frac{A}{s + 5} + \frac{B}{s + 20} \quad (8.36)$$

とおいて，この等式を満たす A, B を求める．右辺を通分した分子と 1 を等値して $A = -B = 1/15$ を得る，または，両辺に $s + 5$ を乗じた上で $s = -5$ を代入して $A = 1/15$ ，両辺に $s + 20$ を乗じた上で $s = -20$ を代入して $B = -1/15$ を得るので，

$$\frac{1}{s^2 + 25s + 100} = \frac{1}{15} \left(\frac{1}{s + 5} - \frac{1}{s + 20} \right) \quad (8.37)$$

よって，

$$X(s) = \frac{1}{15} \left(\frac{1}{s + 5} - \frac{1}{s + 20} \right) v_0 \quad (8.38)$$

上式右辺の括弧内の逆ラプラス変換は，ラプラス変換表 8.1 より $e^{-5t} - e^{-20t}$ となるから，応答 $x(t)$ は，

$$x(t) = \frac{1}{15} (e^{-5t} - e^{-20t}) v_0 \quad (8.39)$$

と求まる．この解が運動方程式を満たすこと，および初期変位がゼロ，初期速度が v_0 となることを確かめられたい．

第9章

1 自由度系の強制振動（5）：インパルス応答・ステップ応答と任意外力に対する応答

9.1 単位インパルス応答と単位ステップ応答

2.1 節でテスト外力として、

- 調和力（正弦波）
- 単位インパルス力
- 単位ステップ力
- ランダム力（白色雑音）

を挙げた。調和力に対する定常応答については第2章から第5章までをかけて詳述したが、ここでは単位インパルス力と単位ステップ力に対する応答について述べる。

まず、**単位インパルス力**とは、ディラックの**デルタ関数** $\delta(t)$ で表される力である。デルタ関数については前章で少し触れたが、

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (9.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (9.2)$$

で定義される超関数（ここでは「通常関数の概念を拡張したもの」程度の理解でよい）である。これは無限小の時間幅に無限大の力が加わる様を表しており、ハンマなどでものを打撃したときに加わる衝撃力を理想化したものである。そして**単位インパルス応答**は、初期変位と初期速度がゼロ、かつ時刻ゼロに単位インパルス力が作用した場合の系の応答であり、過渡応答の一種である。本講義ノートでは記号 $g(t)$ で表す。

次に、**単位ステップ力**とは、**ヘビサイド関数** $u(t)$ で表される力である。ヘビサイド関数についても既に前章で触れたが、

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

で定義される関数である。これは時刻ゼロで突然作用する一定力を表している。ちなみにデルタ関数はヘビサイド関数の微分になっている。そして**単位ステップ応答**とは、初期変位と初期速度がゼロ、かつ時刻ゼロに単位ステップ力が作用した場合の系の応答であり、これも過渡応答の一種である。本講義ノートでは記号 $h(t)$ で表す。

9.2 単位インパルス応答・単位ステップ応答の具体形

それでは、1 質点系について、単位インパルス応答と単位ステップ応答の具体的な形を導いてみよう。いくつかの方法が考えられるが、ここではラプラス変換を使ってこれらを求める。この過程を丁寧に追うことによって、ラプラス変換・逆変換を用いた応答解析のテクニックに慣れることができるだろう。

9.2.1 単位インパルス応答

まず、単位インパルス応答から、

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \delta(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (9.4)$$

式の整理のために、上式を固有振動数 ω_n と減衰比 ζ を用いて書き直すと、

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \frac{1}{m}\delta(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (9.5)$$

ただし、 $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\zeta = c/(2\sqrt{mk})$ である。初期変位と初期速度がゼロであることに注意して上式をラプラス変換すると、前章で述べたようにデルタ関数のラプラス変換は 1 であるから、

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) X(s) = \frac{1}{m} \quad (9.6)$$

これを $X(s)$ について解くと、

$$X(s) = \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (9.7)$$

となる。

前章の例題のように、上式を逆ラプラス変換するために、右辺の部分分数分解を考える。そこで、右辺の分母多項式を因数分解するために、右辺の分母多項式 = 0 の解を $s = s_1, s_2$ とすると、これらは第 1 章で述べた特性根または極とよばれていたもののそのものであり、その値の出かたは ζ の値によって場合分けされる。

(i) $\zeta > 1$ のとき

$s_1, s_2 = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ は相異なる実数であり、式 (9.9) は、

$$X(s) = \frac{1/m}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (9.8)$$

と書ける。上式右辺を部分分数分解すると、

$$X(s) = \frac{1}{m(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2} \right) \quad (9.9)$$

よって、ラプラス変換表 8.1 より、上式の逆ラプラス変換、すなわち単位インパルス応答 $g(t)$ は、 $t < 0$ で $g(t) = 0$, $t \geq 0$ で

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{m(s_1 - s_2)} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \\ &= \frac{1}{2m\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n} \left\{ e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \right\} \\ &= \frac{1}{m\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n} e^{-\zeta\omega_n t} \sinh(\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t) \end{aligned} \quad (9.10)$$

となる。

(ii) $\zeta = 1$ のとき

$s_1 = s_2 = -\omega_n$ は重解で負の実数. このとき式 (9.7) は,

$$X(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{(s + \omega_n)^2} \quad (9.11)$$

と書ける. よって, ラプラス変換表 8.1 より, 上式の逆ラプラス変換, すなわち単位インパルス応答 $g(t)$ は, $t < 0$ で $g(t) = 0$, $t \geq 0$ で

$$g(t) = \frac{1}{m} t e^{-\omega_n t} \quad (9.12)$$

となる.

(iii) $0 < \zeta < 1$ のとき

$s_1, s_2 = (-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n$ は一対の共役複素数であり, 式 (9.7) は, 式 (9.9) を導いたのと同様に,

$$X(s) = \frac{1}{m(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2} \right) \quad (9.13)$$

と部分分数分解できる. よって, ラプラス変換表 8.1 より, 上式の逆ラプラス変換, すなわち単位インパルス応答 $g(t)$ は, $t < 0$ で $g(t) = 0$, $t \geq 0$ で

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{m(s_1 - s_2)} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \\ &= \frac{1}{2mi\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \left\{ e^{-(\zeta-i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} - e^{-(\zeta+i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} \right\} \\ &= \frac{1}{m\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) \end{aligned} \quad (9.14)$$

となる.

(iv) $\zeta = 0$ のとき

$s_1 = -s_2 = i\omega_n$ は共役な純虚数. このときの単位インパルス応答は, 式 (9.14) で $\zeta = 0$ としたものであり, $t < 0$ で $g(t) = 0$, $t \geq 0$ で

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t \quad (9.15)$$

となる.

いろいろな ζ の値の場合の単位インパルス応答を図 9.1 の左列に示す.

9.2.2 単位ステップ応答

次に, 単位ステップ応答を求めよう. 運動方程式は,

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \quad (9.16)$$

式の整理のために, 上式を固有振動数 ω_n と減衰比 ζ を用いて書き直すと,

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \frac{1}{m} u(t), \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \quad (9.17)$$

初期変位と初期速度がゼロであることに注意して上式をラプラス変換すると, 前章で述べたようにヘビサイド関数のラプラス変換は $1/s$ だから,

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) X(s) = \frac{1}{ms} \quad (9.18)$$

これを $X(s)$ について解くと,

$$X(s) = \frac{1/m}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (9.19)$$

となり, 単位ステップ応答は, 式 (9.19) の逆ラプラス変換で求めることができる.

単位インパルス応答のときと同様に, 右辺の分母多項式 = 0 の解, すなわち極を $s = 0, s_1, s_2$ として, ζ の値によって場合分けする.

(i) $\zeta > 1$ のとき

$s_1, s_2 = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ は相異なる実数であり, 式 (9.19) は,

$$X(s) = \frac{1/m}{s(s - s_1)(s - s_2)} \quad (9.20)$$

と書ける. 上式右辺を部分分数分解すると,

$$X(s) = \frac{1}{ms_1s_2} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_2}{s - s_1} - \frac{s_1}{s - s_2} \right) \right\} \quad (9.21)$$

$s_1s_2 = \omega_n^2$ であることより,

$$X(s) = \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_2}{s - s_1} - \frac{s_1}{s - s_2} \right) \right\} \quad (9.22)$$

よって, ラプラス変換表 8.1 より, 上式の逆ラプラス変換, すなわち単位ステップ応答 $h(t)$ は, $t < 0$ で $h(t) = 0, t \geq 0$ で

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{k} \left[1 + \frac{1}{s_1 - s_2} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) \right] \\ &= \frac{1}{k} \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{k} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ \cosh(\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh(\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t) \right\} \right] \end{aligned} \quad (9.23)$$

となる.

(ii) $\zeta = 1$ のとき

$s_1 = s_2 = -\omega_n$ は重解で負の実数. このとき式 (9.19) は,

$$X(s) = \frac{1/m}{s(s + \omega_n)^2} \quad (9.24)$$

と書ける. 上式右辺を部分分数分解すると,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{m\omega_n^2} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \right\} \end{aligned} \quad (9.25)$$

よって, ラプラス変換表 8.1 より, 上式の逆ラプラス変換, すなわち単位ステップ応答 $h(t)$ は, $t < 0$ で $h(t) = 0, t \geq 0$ で

$$h(t) = \frac{1}{k} \{ 1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t} \} \quad (9.26)$$

となる.

(iii) $0 < \zeta < 1$ のとき

$s_1, s_2 = (-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n$ は一対の共役複素数であり、式 (9.19) は、式 (9.22) を導いたのと同様に、

$$X(s) = \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_2}{s - s_1} - \frac{s_1}{s - s_2} \right) \right\} \quad (9.27)$$

よって、ラプラス変換表 8.1 より、上式の逆ラプラス変換、すなわち単位ステップ応答 $h(t)$ は、 $t < 0$ で $h(t) = 0$, $t \geq 0$ で

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{k} \left[1 + \frac{1}{s_1 - s_2} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) \right] \\ &= \frac{1}{k} \left[1 - \frac{1}{2i\sqrt{1-\zeta^2}} \left\{ (\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}) e^{-(\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} - (\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}) e^{-(\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{k} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) \right\} \right] \end{aligned} \quad (9.28)$$

となる。

(iv) $\zeta = 0$ のとき

$s_1 = -s_2 = i\omega_n$ は共役な純虚数。このときの単位ステップ応答は、式 (9.28) で $\zeta = 0$ としたものであり、 $t < 0$ で $h(t) = 0$, $t \geq 0$ で

$$h(t) = \frac{1}{k} (1 - \cos \omega_n t) \quad (9.29)$$

となる。

いろいろな ζ の値の場合の単位ステップ応答を図 9.1 の右列に示す。

9.3 一般外力に対する応答

ここでは一般的な外力に対する応答を考える。説明の過程で、なぜ単位インパルス応答や単位ステップ応答が重要かわかるだろう。

一般的な外力に対する応答を考えるときは、初期条件に対する応答、つまり自由振動成分まで含めた過渡的な応答に興味があることが多い。したがってこの場合も、初期時刻を明示的に取り扱うことのできるラプラス変換と相性がよい。そこで運動方程式

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0 \quad (9.30)$$

の両辺をラプラス変換する。式 (8.15) および式 (8.16) を用いると、

$$(ms^2 + cs + k) X(s) - m\{sx_0 + v_0\} - cx_0 = F(s) \quad (9.31)$$

これを応答のラプラス変換 $X(s)$ について解くと、

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} F(s) + \frac{ms + c}{ms^2 + cs + k} x_0 + \frac{m}{ms^2 + cs + k} v_0 \quad (9.32)$$

これを逆ラプラス変換すると所望の応答 $x(t)$ を得ることができる。 $F(s)$ が簡単な式で表現される場合には部分分数分解などのテクニックとラプラス変換表を用いて逆ラプラス変換を計算できるが、ここでは一般的な議論をしよう。

上式の構造から、応答 $x(t)$ の式は

$$x(t) = \text{外力に対する応答} + \text{初期変位に対する応答} + \text{初期速度に対する応答} \quad (9.33)$$

という形に分解されることがわかる。まずは初期変位と初期速度が0の場合を考えてみよう。式(9.32)において右辺第1項まで考えると、

$$X(s) = G(s)F(s) \quad (9.34)$$

上式が、初期値がともにゼロの場合の任意外力に対する応答を与える、ラプラス変換領域における式である。ただし

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (9.35)$$

とおいた。このように出力のラプラス変換を入力のラプラス変換で割った比 $G(s)$ を**伝達関数**という。伝達関数は振動系に限らず線形の動的システムの入出力関係を記述するために用いられる。

さて、外力 $f(t)$ として単位インパルス力 $\delta(t)$ を考えると、式(8.17)より $F(s) = 1$ 。したがって単位インパルス力に対する応答（単位インパルス応答）のラプラス変換は、式(9.34)より伝達関数 $G(s)$ そのものである。つまり、

$$\text{単位インパルス応答のラプラス変換} = \text{伝達関数}$$

$$\text{伝達関数の逆ラプラス変換} = \text{単位インパルス応答}$$

したがって式(9.34)は次のようにも書ける。

$$\text{応答のラプラス変換} = \text{単位インパルス応答のラプラス変換} \times \text{外力のラプラス変換}$$

これを逆ラプラス変換すると、式(8.14)より、

$$\text{応答} = \text{単位インパルス応答} * \text{外力}$$

ここで*は畳み込み積分を表す。式で書くと、

$$x(t) = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau) d\tau \quad (9.36)$$

ここで $g(t)$ は単位インパルス応答である。

次に0でない初期変位と初期速度を考える。まず、準備から。外力 $f(t)$ として単位ステップ力 $u(t)$ を考えると、式(8.18)より $F(s) = 1/s$ 。したがって単位ステップ力に対する応答（単位ステップ応答）のラプラス変換は、式(9.34)より伝達関数 $G(s)/s$ である。つまり、

$$\text{単位ステップ応答のラプラス変換} = \text{伝達関数}/s$$

$$\text{伝達関数}/s \text{ の逆ラプラス変換} = \text{単位ステップ応答}$$

の関係がある。

次に、先ほどの式(9.32)を少し書き換える。

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} F(s) + \left(\frac{1}{s} - \frac{k/s}{ms^2 + cs + k} \right) x_0 + \frac{m}{ms^2 + cs + k} v_0 \quad (9.37)$$

ここで式(8.18)より、右辺第2項目の括弧内第1項の逆ラプラス変換は単位ステップである。また括弧内第2項は伝達関数 $/s$ に $-k$ を乗じた形をしているため、これは単位ステップ応答のラプラス変換 $\times (-k)$ に相当するから、逆ラプラス変換すると(単位ステップ応答) $\times (-k)$ になる。よって全体の逆ラプラス変換は、

$$x(t) = \underbrace{\int_0^t g(t-\tau)f(\tau) d\tau}_{\text{外力に対する応答}} + \underbrace{\{u(t) - kh(t)\} x(0)}_{\text{初期変位に対する応答}} + \underbrace{mg(t)\dot{x}(0)}_{\text{初期速度に対する応答}} \quad (9.38)$$

ここで $h(t)$ は単位ステップ応答である。これが一般的な外力と初期条件に対する過渡応答解である。

さらに単位ステップ応答も単位インパルス応答から導くことができる。すなわち、 $u(t) = \int_0^t \delta(\tau) d\tau$ であるので、単位インパルス応答を時間積分すると単位ステップ応答になる。したがって系のインパルス応答さえ知っていれば、一般的な外力と初期条件に対する過渡応答を求めることができる。単位インパルス応答が重要なのはこのためである。

9.4 自由振動とインパルス応答・ステップ応答

- 式 (9.38) より次のことがわかるので覚えておくとよい。
 - － 初期変位に対する自由振動応答は単位ステップ応答と（定数項と比例定数の違いを除いて）同形である。
 - － 初期速度に対する自由振動応答は単位インパルス応答と（比例定数の違いを除いて）同形である。

図 1.5 と図 9.1 を参照せよ。このことは、振動系の特性を調べる意味において、初期変位を与えることとステップ外力を与えることは本質的に等価であり、初期速度を与えることとインパルス外力を与えることは本質的に等価であることを意味している。

- 上のことから、自由振動を調べることと単位インパルス応答または単位ステップ応答を調べることは振動系の特性を調べる意味において等価であることがわかる。前述のように単位ステップ応答は単位インパルス応答から導くことができるので、結局、単位インパルス応答を調べればよい。さらに単位インパルス応答は伝達関数で決まる（単位インパルス応答＝伝達関数の逆ラプラス変換）ので、振動系の特性を調べる意味において、「自由振動を調べることと伝達関数を調べることは等価である」ということができる。

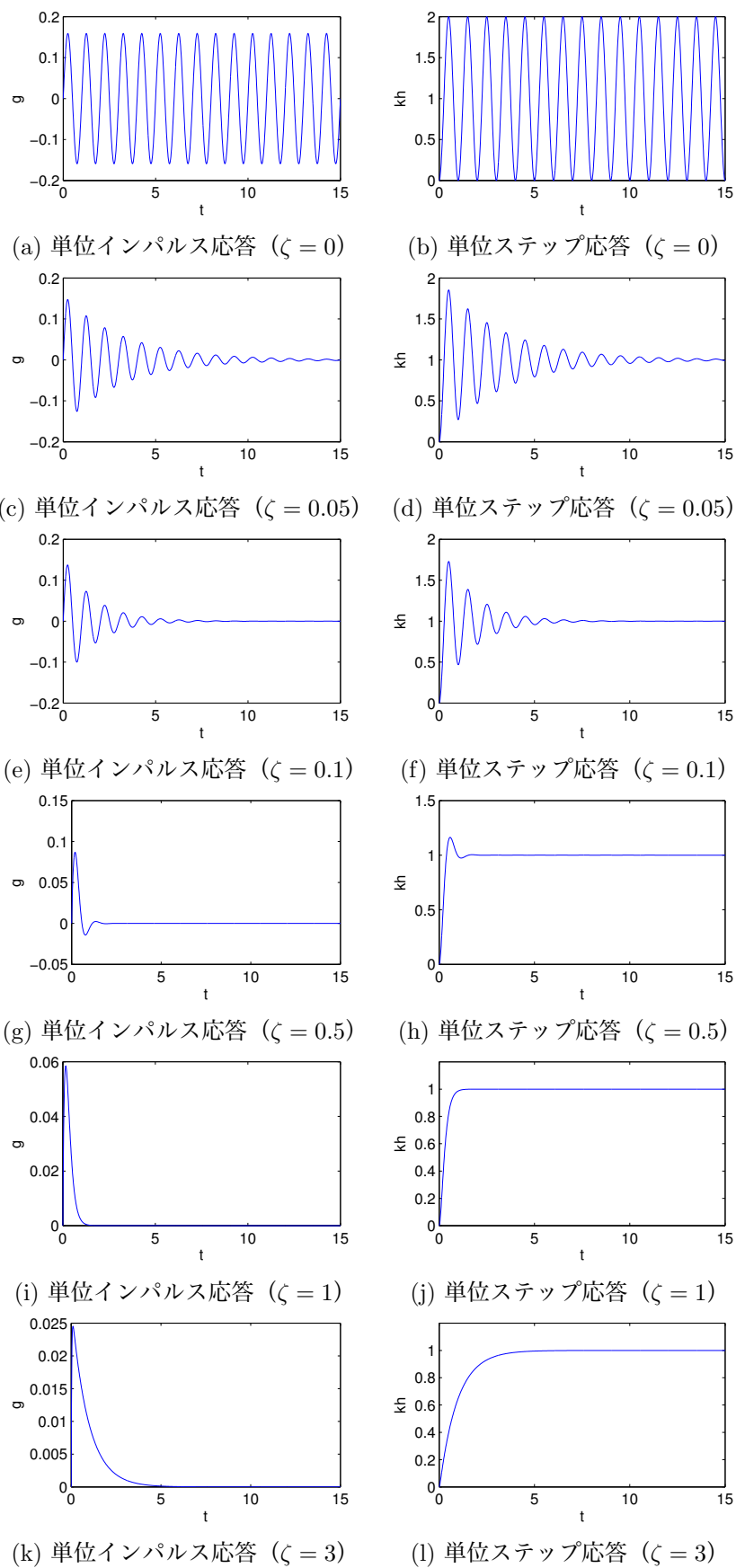


Fig. 9.1 減衰比の値と単位インパルス応答・単位ステップ応答

第10章

2自由度系（1）：運動方程式

本章では，2自由度系の運動方程式をたててみよう．本章で述べるような比較的簡単な系では，物体（質点または剛体）に作用する力を数え上げることで運動方程式を組み立てることができる．回転運動と並進運動が連成するような少し複雑な系になると，そのようなアプローチよりは，**ラグランジュの運動方程式**のようなシステムティックな方法をとった方が間違いが少ないが，本講義では触れない．ラグランジュの運動方程式については「防振システム工学」で扱う．

10.1 2質点系の運動方程式

2質点非減衰系 図 10.1 のように，ばね，質点で構成される2自由度非減衰並進振動系を考える．質点1についての運動方程式は，

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + k_1 x_1(t) + k_2(x_1(t) - x_2(t)) = f_1(t) \quad (10.1)$$

質点2については，

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + k_2(x_2(t) - x_1(t)) + k_3 x_2(t) = f_2(t) \quad (10.2)$$

これらを整理してまとめると，

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = f_1(t) \quad (10.3)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = f_2(t) \quad (10.4)$$

または行列形式でまとめると，

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

または

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (10.6)$$

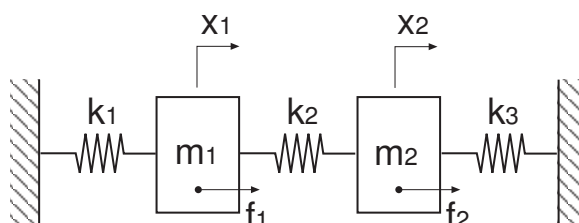


Fig. 10.1 2質点非減衰並進振動系

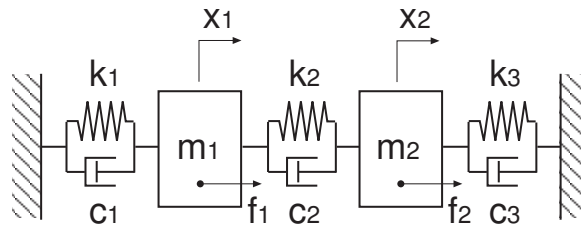


Fig. 10.2 2質点並進振動系

と書ける． M を質量行列， K を剛性行列という．

ここで K が対角行列でないことに注意．もし M と K がともに対角なら上式は質点 1 と質点 2 に関する二つの独立した運動方程式になる．これらの行列が 0 でない非対角成分を持つということは，二つの質点が連成していることを意味する．

2質点減衰系 次に，ばねと並列にダッシュポットを配置した図 10.2 の系では，運動方程式は

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

または，

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (10.8)$$

となる． C を減衰行列という．また M, C, K をまとめてこの系の特性行列という．この例ではダッシュポットはばねに並列に配置されているので， C は K と同形である．

10.2 基礎励振される2質点系

サスペンションの一輪モデル 基礎励振される2質点系の例として，図 10.3 の2質点系を考えよう．これはサスペンションの一輪モデルとしてよく用いられる． m_1 はタイヤ，車軸などの質量を表しており，ばね下質量と呼ばれる． m_2 は一輪あたりの車体質量を表しており，ばね上質量と呼ばれる．また k_1, c_1 はタイヤや車軸の剛性と減衰をモデル化したものであり， k_2, c_2 はサスペンションのばね定数と減衰係数である．系に対する入力 $x_0(t)$ は基礎励振であり，路面形状で決まる時間関数である．

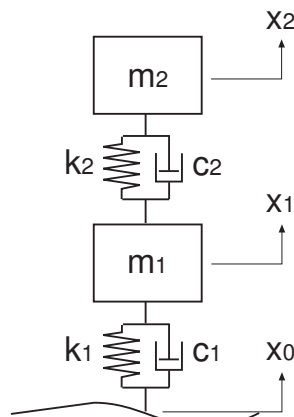


Fig. 10.3 サスペンションの一輪モデル

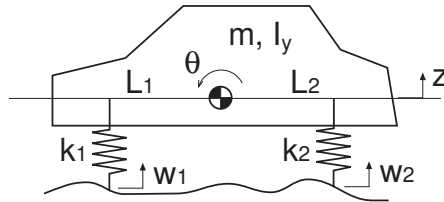


Fig. 10.4 二輪サスペンションモデル

運動方程式は,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \dot{x}_0(t) + k_1 x_0(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

となる. あるいは, $x_1(t) - x_0(t) = y_1(t)$, $x_2(t) - x_0(t) = y_2(t)$ すなわち路面からの相対変位で座標を定義し直して運動方程式を立て直すと,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \ddot{x}_0(t) \quad (10.10)$$

とも書ける. または,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{x}_0(t) \quad (10.11)$$

ここで $\mathbf{1} = [1 \ 1]^T$ である.

10.3 剛体系の運動方程式 *

前節でサスペンションの一輪モデルとして変位励振を受ける2質点モデルを紹介したが, 車体全体の上下動とピッチング(車軸と平行な軸まわりの回転運動)を考慮したモデルとして, 図 10.4 のような弾性支持された剛体モデルを立てることができる. ここで重心の前後方向の動きは考慮しないものとする.

車体の動きを表す変数(座標)として, 上下方向変位 z と回転角 θ をとる. まず車体の上下方向の運動方程式は,

$$m\ddot{z}(t) + k_1(z(t) - L_1\theta(t) - w_1(t)) + k_2(z(t) + L_2\theta(t) - w_2(t)) = 0 \quad (10.12)$$

となる. 次に重心まわりの回転に関する運動方程式は,

$$I_y\ddot{\theta}(t) - k_1L_1(z(t) - L_1\theta(t) - w_1(t)) + k_2L_2(z(t) + L_2\theta(t) - w_2(t)) = 0 \quad (10.13)$$

となる. これらを整理してまとめると,

$$m\ddot{z}(t) + (k_1 + k_2)z(t) - (k_1L_1 - k_2L_2)\theta(t) = k_1w_1(t) + k_2w_2(t) \quad (10.14)$$

$$I_y\ddot{\theta}(t) - (k_1L_1 - k_2L_2)z(t) + (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\theta(t) = -k_1L_1w_1(t) + k_2L_2w_2(t) \quad (10.15)$$

または行列形式で

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -(k_1L_1 - k_2L_2) \\ -(k_1L_1 - k_2L_2) & k_1L_1^2 + k_2L_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1w_1(t) + k_2w_2(t) \\ -k_1L_1w_1(t) + k_2L_2w_2(t) \end{bmatrix} \quad (10.16)$$

を得る. 上式の剛性行列は0でない非対角成分を持つので, 一般に上下動とピッチングは連成することがわかる. ただし, $k_1L_1 = k_2L_2$ となるように重心位置とばね定数を設計できれば, 上下動とピッチングを独立にすることができる.

第11章

2自由度系（2）：自由振動

11.1 2質点自由振動系の運動方程式

図 11.1 に示す 2 質点系において，外力が作用しない場合の運動方程式は，次のようになる．

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (c_1 + c_2) \dot{x}_1(t) - c_2 \dot{x}_2(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0 \quad (11.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) - c_2 \dot{x}_1(t) + (c_2 + c_3) \dot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0 \quad (11.2)$$

あるいは行列形式で書いて，

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

または，

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (11.4)$$

と書ける．

11.2 非減衰 2 質点系の自由振動

11.2.1 特性方程式（振動数方程式）

式 (11.3) から減衰項を取り去って減衰が作用しない（図 11.1 においてダッシュポットを取り去った）系の自由振動を考えよう．減衰が存在する場合の自由振動については，本講義では言及しない．

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

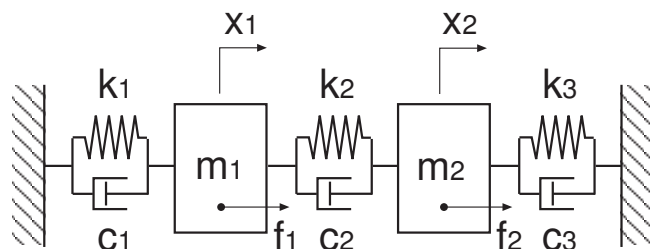


Fig. 11.1 2 質点系

基本的な考え方は1自由度系のときと全く同じである。まず、解を指数関数の形に仮定して運動方程式に代入し、特性方程式を導く。すなわち、

$$x_1(t) = X_1 e^{st} \quad (11.6)$$

$$x_2(t) = X_2 e^{st} \quad (11.7)$$

あるいはベクトル表記で、

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} e^{st} \quad (11.8)$$

とおき、運動方程式 (11.5) に代入して e^{st} で割ると、

$$s^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

整理して、

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & m_2 s^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.10)$$

これが自明でない解を持つためには、行列式が0でなければならない。

$$\begin{vmatrix} m_1 s^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & m_2 s^2 + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (11.11)$$

よって、

$$(m_1 s^2 + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + k_2 + k_3) - k_2^2 = 0 \quad (11.12)$$

式 (11.11) またはこれを展開した式 (11.12) を**特性方程式**または**振動数方程式**という。今の場合、これは s に関する4次方程式であり、しかもよく見ると s^2 に関する2次方程式であることがわかる。

特性方程式 (11.12) を s^2 について解く。式 (11.12) を整理すると、

$$m_1 m_2 s^4 + \{m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)\} s^2 + (k_1 + k_3)k_2 + k_1 k_3 = 0 \quad (11.13)$$

解の出かたを調べるために判別式を計算すると、

$$(m_1 + m_2)^2 k_2^2 + 2(m_1 - m_2)(m_1 k_3 - m_2 k_1)k_2 + (m_1 k_3 - m_2 k_1)^2 \quad (11.14)$$

と k_2 についての2次式になり、さらにこの判別式を調べると負またはゼロであることがわかるから、式 (11.14) は正またはゼロ。ただし等号は $k_2 = 0$ かつ $k_1/m_1 = k_3/m_2$ のとき。したがって、この例外を除くと、式 (11.13) の解 s^2 は異なる負の実数になる。これを

$$s^2 = -\omega_1^2, -\omega_2^2 \quad (0 < \omega_1 < \omega_2) \quad (11.15)$$

とおくと、特性方程式の解、すなわち**極**（または**特性根**）として、

$$s = \pm i\omega_1, \pm i\omega_2 \quad (11.16)$$

を得る。極は純虚数となり、したがって、この系に生じうる自由振動は、虚部 ω_1, ω_2 を振動数とする振幅一定の単振動であることがわかる。

11.2.2 自由振動の一般解

さて、式 (11.10) が非自明な解を持つ条件から極が得られ、この系に生じうる自由振動は異なる振動数を持つ二種類の単振動であることがわかった。あとはこれらを重ね合わせたものが解となるはずだが、実は任意の振幅で各質点が振動できるわけではなく、おのおのの単振動において、二つの質点はある条件を満たすような振幅でしか振動できない。このあたりの事情を明らかにするために、次に式 (11.10) を振幅 X_1, X_2 について解いて、具体的な自由振動応答を求めよう。

ここで先ほど求めた s の値は式 (11.10) の行列式を 0 とする値であり、このとき式 (11.10) の行列はランクが落ちて実質的に一つの式になっている。そこで第 1 式だけ評価すると、

$$(m_1 s^2 + k_1 + k_2)X_1 - k_2 X_2 = 0, \quad s = \pm i\omega_1, \pm i\omega_2 \quad (11.17)$$

となる。仮に第 2 式だけを評価してもこれと等価な式が得られる。上式は X_1, X_2 平面上の原点を通る一本の直線を表すが、この直線上の X_1, X_2 は全て解になる。したがって X_1, X_2 の比のみが決まることになり、定数倍の自由度が残る。この比、すなわち質点 1 に対する質点 2 の応答の振幅比は

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{-m_1 \omega_1^2 + k_1 + k_2}{k_2}, \frac{-m_1 \omega_2^2 + k_1 + k_2}{k_2} \quad (11.18)$$

これを ϕ_{12}, ϕ_{22} と書くと、結局、自由振動応答の一般解として、

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = X_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{12} \end{bmatrix} e^{i\omega_1 t} + X_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{12} \end{bmatrix} e^{-i\omega_1 t} + X_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{22} \end{bmatrix} e^{i\omega_2 t} + X_{14} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{22} \end{bmatrix} e^{-i\omega_2 t} \quad (11.19)$$

を得る。上式に含まれる四つの任意定数は初期条件から決定される。

1 自由度系の場合と同じく、 x_1, x_2 が実数であるためには、 X_{11} と X_{12} , X_{13} と X_{14} が互いに共役でなければならない。すなわち、 $X_{12} = \overline{X_{11}}$, $X_{14} = \overline{X_{13}}$. $X_{11} = \frac{1}{2}a_1 e^{i\varphi_1}$, $X_{13} = \frac{1}{2}a_2 e^{i\varphi_2}$ とおいてこれらの関係を考慮すると、

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{12} \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{22} \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (11.20)$$

となる。任意定数 $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$ は初期条件から決められる。さらに、 $\phi_1 = [1 \ \phi_{12}]^T$, $\phi_2 = [1 \ \phi_{22}]^T$ とおけば、

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^2 a_n \phi_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (11.21)$$

と整理して表すことができる。

11.2.3 自由振動の性質

ここまでで 2 自由度非減衰系の自由振動の一般解が導出できたわけだが、導出の流れをまとめておく。

1. 運動方程式 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$
2. 解を $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}e^{st}$ と仮定して運動方程式に代入して、 $(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K})\mathbf{X} = \mathbf{0}$ を得る。
3. 上式が自明でない解を持つための条件、すなわち特性方程式 $|\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K}| = 0$ を解いて極 s を求める。
4. それぞれの極の値について $(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K})\mathbf{X} = \mathbf{0}$ を解いて応答の振幅比を求める。
5. 得られた解を重ね合わせて一般解 $\mathbf{x}(t)$ を得る。

得られた自由振動の一般解（式 (11.21)）の性質と関連する用語をまとめよう。

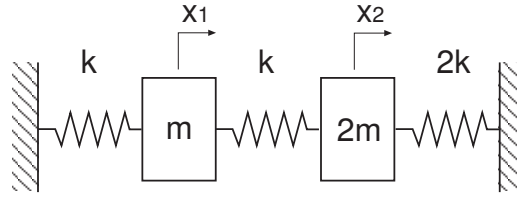


Fig. 11.2 2 質点系

- 自由振動は二つの単振動成分の重ね合わせである。この単振動それぞれを**規準振動**という。
- 規準振動の重ね合わせの混合比率は初期条件で決まる。
- それぞれの規準振動は振動数 ω_1, ω_2 を持つ。これらをこの系の**固有振動数**という。(1 自由度系で非減衰自由振動の振動数=固有振動数であったことを思い出そう。)
- それぞれの規準振動において、各質点は ϕ_1, ϕ_2 で表される振幅比を持つ。振幅「比」なので定数倍の自由度が残ることに注意。ここでは 1 番目の質点の振幅を 1 とすることで**規格化**している。 ϕ_1, ϕ_2 は振動の「形」を規定するベクトルであり、**モードシェイプベクトル**と呼ばれる。
- つまり、それぞれの規準振動は、固有振動数とモードシェイプベクトルで特徴づけられる。これらをまとめて**モーダルパラメータ**という。
- 規準振動のことを、**振動モード**と呼んだり**固有モード**と呼んだりする。通常、固有振動数の小さい方から 1 次モード、2 次モードと呼ぶ。

例題：2 質点系

図 11.2 の 2 質点系の自由振動応答を求めよう。まず運動方程式は、

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

解を

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} e^{st} \quad (11.23)$$

とおき、運動方程式 (11.22) に代入して e^{st} で割ると、

$$\begin{bmatrix} ms^2 + 2k & -k \\ -k & 2ms^2 + 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.24)$$

非自明な解を持つための条件として、特性方程式を得る。

$$\begin{vmatrix} ms^2 + 2k & -k \\ -k & 2ms^2 + 3k \end{vmatrix} = (ms^2 + 2k)(2ms^2 + 3k) - k^2 = 0 \quad (11.25)$$

これを s^2 について解いて、

$$s^2 = -\frac{k}{m}, -\frac{5k}{2m} \quad (11.26)$$

すなわち、自由振動の振動数 (**固有振動数**) は、

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{2m}} \quad (11.27)$$

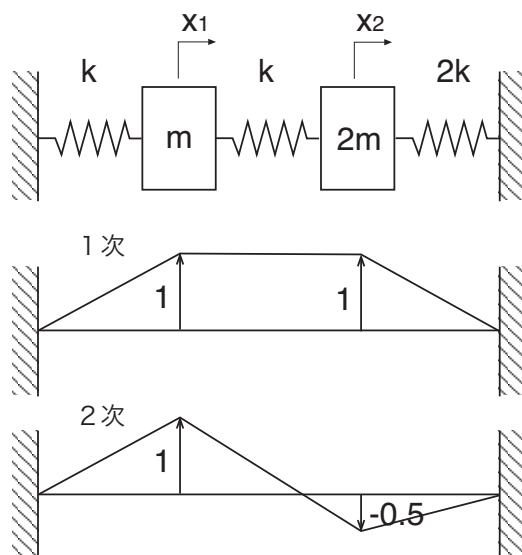


Fig. 11.3 図 11.2 の 2 質点系のモードシェイプ (ただし, 振動振幅を垂直方向に表示してある.)

式 (11.26) をそれぞれ式 (11.24) に代入して $[X_1, X_2]^T$ について解くと, X_1 と X_2 の比を得る.

$$s = i\omega_1 \quad \text{のとき} \quad \frac{X_2}{X_1} = 1 \quad (11.28)$$

$$s = i\omega_2 \quad \text{のとき} \quad \frac{X_2}{X_1} = -0.5 \quad (11.29)$$

このように, 振幅ベクトルは, 第 1 要素 X_1 と第 2 要素 X_2 の比が決まるのみで, 定数倍の自由度が残る. そこで, 特に $X_1 = 1$ と固定したときの振幅ベクトルを ϕ_1, ϕ_2 と書くと,

$$s = i\omega_1 \quad \text{のとき} \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11.30)$$

$$s = i\omega_2 \quad \text{のとき} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad (11.31)$$

これを用いると, この 2 質点系の自由振動の一般解は

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right) + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{5k}{2m}}t + \varphi_2\right) \quad (11.32)$$

となる. それぞれの**規準振動**のモードシェイプを図 11.3 に示す.

第12章

2 自由度系（3）：強制振動

12.1 減衰2質点系の強制振動

基本的には1自由度系と同じ方針でいくが、運動方程式が

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (12.1)$$

のように行列係数を持つ微分方程式になる分、複雑度が増す。

12.1.1 定常応答

各質点に調和外力が作用するとしてこれに対する定常応答を求めよう。手順は1自由度系るときと同様で、次のようになる。

1. 外力と応答が同じ振動数 ω で調和振動するとして複素数表示で表し、運動方程式に代入。
2. 応答振幅（複素振幅）について解く。

まず、外力を複素数表示で

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \mathbf{F} e^{i\omega t} \quad (12.2)$$

と表す。 F_1, F_2 は複素振幅であり、絶対値が振動振幅を、偏角が初期位相や二つの外力間の位相差を表現する。この調和外力に対する定常応答を

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \mathbf{X} e^{i\omega t} \quad (12.3)$$

とにおいて、運動方程式 (12.1) に代入して $e^{i\omega t}$ で割ると、

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (12.4)$$

これより

$$\mathbf{X} = (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F} \quad (12.5)$$

となる。1質点系の場合と同じく、これを

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}_f(\omega) \mathbf{F} \quad (12.6)$$

と書いて、 $\mathbf{G}_f(\omega)$ を周波数応答関数行列という。ただし、

$$\mathbf{G}_f(\omega) = (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \quad (12.7)$$

である。行列の各要素の絶対値と偏角が外力と応答の振幅比、位相差を表す点も1自由度系の場合と同様である。

12.1.2 過渡応答

各質点に任意の外力が作用するとしてこれに対する過渡応答を求めよう。手順は1自由度系るときと同様で、次のようになる。

1. 運動方程式をラプラス変換。
2. 応答のラプラス変換について解く。
3. 逆ラプラス変換して時間波形を求める。

簡単のため、初期変位、初期速度が全てゼロの場合を考える。まず運動方程式をラプラス変換して、

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}) \mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (12.8)$$

$\mathbf{X}(s)$ について解くと、

$$\mathbf{X}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F}(s) \quad (12.9)$$

となる。ここで

$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1} \quad (12.10)$$

とおくと、

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{F}(s) \quad (12.11)$$

となる。 $\mathbf{G}(s)$ はこの系における外力から変位応答への**伝達関数（コンプライアンス）行列**である。 $s = i\omega$ とすると定常応答の周波数応答関数行列 $\mathbf{G}_f(\omega)$ が得られるのは1自由度系の場合と同じである。

最後に式 (12.11) を逆ラプラス変換すると、変位応答波形を求めることができる。ただしこのようにして応答が求められるのは3自由度系程度までが限界であり（逆行列計算を必要とするため）、それ以上の多自由度系では現実的でない。そのような場合には**モード解析法**を用いるのが通常である。モード解析法については、「防振システム工学」で扱う。